RELAÇÕES DOS COEFICIENTES DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM SUAS RAÍZES

Cleiton Joni Benetti Lattari *

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo discutir o ensino - aprendizagem da equação do segundo grau e apresentar uma nova fórmula de resolução.

Abstract

The present work aims at discussing the educational process of a square equation and introduces a new form of resolution.

Introdução

Começamos a investigar as funções do segundo grau, com o intuito de buscar novos caminhos para o seu ensino - aprendizagem na década de 1970 (Lattari, 1998). Por ser um estudo de pouco interesse científico, as funções do segundo grau ficaram restritas à sala de aula, onde se discute rapidamente a fórmula de Bhaskara (Karlson,1961; Hogben, 1970; Boyer, 1974;Garbi, 1997), desprezando o seu contexto histórico ou proposta de qualquer aprofundamento nesses estudos.

Nesse artigo discutiremos as relações existentes entre os coeficientes da equação de segundo grau e suas raízes.

Tal estudo tem por objetivo aprofundar a discussão em torno das propriedades das raízes da equação do segundo grau e chegar a uma nova fórmula de resolução para o reforço de seu ensino - aprendizagem.

A equação do segundo grau: relações entre coeficientes e raízes

A equação do segundo grau é dada por

$$a x^2 + b x + c = 0 \qquad (1)$$

*Professor de matemática do CESULON e da FEMA/IMESA - Assis-SP

com $a \neq 0$, e suas raízes são:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 \; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Onde a, b e $c \in R$ são os coeficientes da equação e x_1, x_2 são suas raízes.

Se são conhecidas as raízes de uma equação do segundo grau, então, podemos compô-las da seguinte forma:

$$S = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad P = x_1 \cdot x_2 \qquad (3)$$

tal que $x^2 + S\,x + P = 0$, para o caso em que o coeficiente $a = 1$.

É fato corrente na literatura que a soma das raízes da equação do 2º grau vale:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad (4)$$

e para o seu produto, temos:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad (5)$$

Passaremos agora a estudar as outras possibilidades de se relacionar os coeficientes dessa equação com as suas raízes.

Das expressões (4) e (5), podemos achar a soma do inverso das raízes:

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} \qquad (6)$$

A diferença entre as raízes nos dá

$$x_1 - x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \qquad (7)$$

$$\therefore\ x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

E da razão entre as expressões (5) e (7) temos

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{a}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = +\frac{\sqrt{\Delta}}{c} \qquad (8)$$

Como, $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = -\dfrac{b}{\sqrt{\Delta}}$, o seu inverso será:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{b} \qquad (9)$$

Uma Nova Fórmula de Resolução

Do que foi exposto acima, vamos agora, encontrar uma nova fórmula de resolução da equação completa do segundo grau

Das expressões (6) e (8), podemos montar um sistema de equações em que x_1 e x_2 são as incógnitas, ou seja:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2c}{-b + \sqrt{\Delta}} \quad e \quad x_2 = \frac{2c}{-b - \sqrt{\Delta}} \qquad (10)$$

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{\Delta}}{c}$$

Logo a solução da equação completa do segundo grau, a x^2 + b x +c =0, com a ≠ 0, será também a fórmula

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{\Delta}} \qquad (11)$$

Aplicação

Vamos resolver um exemplo para vermos como a nova fórmula de resolução da equação do segundo grau funciona:

resolveremos a equação $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

O delta dessa equação é, $\Delta = 49$, logo, $\sqrt{\Delta} = 7$ e isso nos dá

$x = \dfrac{2(-5)}{-3 \pm 7}$, o que nos fornece, $x_1 = -5/2$ e $x_2 = 1$, que são as raízes da equação dada.

Discussão

Tomando agora a fórmula (11) e multiplicando pelo conjugado, isso nos faz retornar à formula de resolução tradicional, ou seja:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (12)$$

E se experimentarmos multiplicar essa fórmula pelo conjugado, veremos que retornamos à fórmula (11), o que mostra que uma é decorrente da outra e, portanto, equivalentes.

Analisando as duas fórmulas, (11) e (12), podemos verificar que:

(i) quando $\Delta = 0$, na fórmula (11), temos $x = -\dfrac{2c}{b}$, e na fórmula (12) temos $x = -\dfrac{b}{2a}$;

(ii) quando $\Delta > 0$, temos duas raízes reais e distintas;

(iii) quando $\Delta < 0$, não temos raízes reais;

(iv) a fórmula (12) é mais completa que a fórmula (11), uma vez que ela resolve todos os tipos de equações do segundo grau, enquanto que a fórmula (11) não soluciona a equação $a x^2 + b x = 0$, $a \neq 0$, diretamente, sendo, por isso, uma fórmula incompleta.

(v) uma idéia para se mostrar a íntima relação que existe entre as raízes da equação do segundo grau e os seus coeficientes é criar problemas que levem os alunos a identificar isso, quebrando a mecanização dos processos resolutivos. Um exemplo é o problema que se segue:

Uma equação do segundo grau possui delta igual a 4, a razão da diferença de suas raízes pela sua soma igual a 2 e o triplo da diferença de suas raízes é 6.

a) monte a equação;

b) calcule as suas raízes.

Ao resolver esse problema, nós temos que manipular coeficientes e raízes desconhecidas para chegarmos às respostas esperadas, ou seja, $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$ e 3/2 e - 1/2 como raízes.

Devemos observar que no item (b) não se especifica o uso das fórmulas de resolução mencionadas acima, pois pode-se chegar às raízes sem necessariamente usar as fórmulas de resolução, apenas montando um sistema simples no qual a diferença e a soma das raízes estão envolvidas.

Conclusão

Deste estudo podemos concluir que ainda existem formas diferentes de se chegar à fórmula de resolução da equação do segundo grau (Lattari, 1998) e utilizá-las para o estímulo ao seu ensino - aprendizagem.

Problemas podem ser levantados para mostrar as relações existentes entre as raízes e os coeficientes, como proposta de uma metodologia de ensino que não seja aquela mecânica de sua resolução.

Um fato a se notar é que para $\Delta = 0$, $x = -\frac{2c}{b}$ e $x = -\frac{b}{2a}$, conduzem ao mesmo resultado, mostrando assim que existem formas diferentes de se chegar à mesma resolução.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. **História da matemática**, São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**, São Paulo: Makron Books, 1997.

KARLSON, Paul. **A magia dos números**. Porto Alegre: Globo, 1961.

KOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da matemática**. Porto Alegre: Globo, 1970.

LATTARI, C.J.B. O zero da função do segundo grau. **Terra e Cultura**. Ano XIV, Nº 27, 1998.