O ZERO DA FUNÇÃO DO 2º GRAU : UMA DEMONSTRAÇÃO PARA O CURSO DE CÁLCULO.

Cleiton Joni Benetti Lattari *

RESUMO

Este artigo tem por objetivo mostrar uma forma diferente de se chegar à fórmula de Bhaskara e propõe o uso do método no curso de Cálculo, como forma ilustrativa do emprego das derivadas.

ABSTRACT

The goal of this paper is to show a different way to get to Bhaskara equation; it also suggests the use of the given method in Calculus Courses as an illustrative way to use derivates.

UNITERMOS: Equação de Bhaskara- Novo Método de Solução- Derivadas

KEY- WORDS: Bhaskara, equation, derivates

INTRODUÇÃO

Há muito que se ensina a equação do segundo grau apenas apresentando aos alunos a tradicional fórmula de Bhaskara[1, 2] que é, com raras exceções ,demonstrada pelo professor, apesar desta vir apresentada nos livros didáticos[3, 4, 5].

No primeiro grau escolar, aprende-se a equação quadrática completa da seguinte forma:

$$a x^2 + b x + c = 0 \qquad (1)$$

onde x é a variável real e, a, b, c; com $a \neq 0$ são os coeficientes da equação,

A relação:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)$$

*Professor do Departamento de Ciências Exatas do CESULON

é a chamada equação de Bhaskara para a resolução desse tipo de equação.

No segundo grau escolar, a função quadrática é apresentada como

$F(x) = x^2$ (3)

cujo gráfico é uma parábola (figura 1).

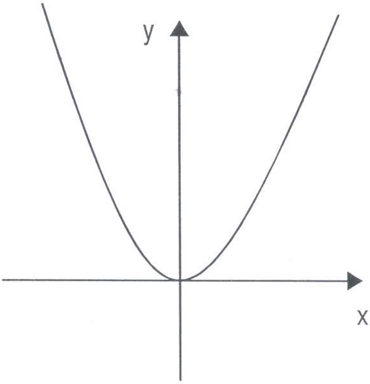

Figura 1 - Parábola que descreve a função $F(x) = x^2$

Essa função também é estudada na forma:

$F(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$ e $a \neq 0$ (4)

onde se pede para calcular o seu zero , ou seja, achar as suas raízes.

Novamente Bhaskara é invocado sem demonstrações em sala de aula.

Tentando cobrir essa lacuna, nós apresentamos três formas de demonstrar a fórmula de resolução da equação do segundo grau ou o cálculo do zero da função quadrática.

Duas delas são demonstrações correntes na literatura, e uma terceira, que desenvolvemos usando derivadas, pode ser usada para ilustrar o emprego das derivadas em cursos de cálculo do terceiro grau.

A FÓRMULA DE RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU

Como dissemos acima apresentaremos, aqui, três métodos de se chegar à fórmula de Bhaskara.

(I) MÉTODO DE BHASKARA

Dada a equação do segundo grau

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in R$ e $a \neq 0)$

fazemos:

$ax^2 + bx = -c$

e multiplicando ambos os membros da equação acima por 4a, vem:

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Somando b^2 em ambos os lados da expressão, temos:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \qquad (5)$$

(i) O primeiro termo da expressão (5) é um trinômio do segundo grau e pode ser posto na forma:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2 \qquad (6)$$

(ii) O segundo termo da expressão (5) nós chamamos de discriminante e escrevemos:

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad (7)$$

Da comparação entre (5) e (6), temos:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\therefore 2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (8)$$

Chegamos portanto ao valor de x da equação do segundo grau.

(II) O MÉTODO DOS ÁRABES

Neste método, temos o seguinte processo:

Tomamos a equação $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in R$ e $a \neq 0$) e isolamos o coeficiente c,

$$ax^2 + bx = -c, \qquad (9)$$

Dividindo tudo por a, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} \qquad (10)$$

Para obtermos o trinômio, somamos $\frac{b^2}{4a^2}$ em ambos os lados da equação (10), o que nos fornece:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\therefore \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A fórmula de resolução acima é a mesma da deduzida pelo método de Bhaskara.

O ESTUDO DO DISCRIMINANTE

Em ambos os métodos citados acima, recorremos ao uso do discriminante.

Seja a equação do segundo grau

$a x^2 + b x + c = 0$,

chama-se discriminante desta equação a expressão $\Delta = b^2 - 4ac$.

A discussão das raízes de uma equação do segundo grau consiste na análise do discriminante.

(a) Se $\Delta > 0$ a equação terá duas raízes reais e distintas;

(b) Se $\Delta = 0$ a equação terá duas raízes reais e iguais;

(c) Se $\Delta < 0$ a equação não terá solução no campo dos reais e devemos lembrar que $x = a + i\,b$, com a e b pertencentes aos reais, onde i é um número imaginário da forma $\sqrt{-1} = i$

(III) O MÉTODO DA DERIVADA

Como podemos ver, os dois métodos expostos acima são eficientes para se chegar à formula de resolução dessa equação.

Desenvolvemos, porém, um outro método que julgamos ser tão eficiente quanto os citados acima, sendo no entanto mais rico por envolver conceitos da matemática moderna.

Dada a função $F(x) = a x^2 + b x + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$, podemos interpretar essa função como sendo um polinômio do tipo

$$P(x) = a x^2 + b x + c \qquad (11)$$

Sabemos que todo polinômio pode ser assim escrito:

$$P(x) = d(x) \, . \, q(x) + r(x) \qquad (12)$$

A expressão (12) sugere uma operação de divisão de polinômios da seguinte forma:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & d(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array} \qquad (13)$$

Como podemos ver, temos que encontrar d (x) para podermos dividir o polinômio P (x).

Calculemos a derivada de $P(x) = a x^2 + b x + c$ em relação a x.

$$\frac{dP(x)}{dx} = 2ax + b \qquad (14)$$

Fazendo $\dfrac{dP(x)}{dx}$ $d(x)$, ou seja, $d(x) = 2ax + b$, podemos substituir tudo na equação (13) e efetuar a divisão. Obtemos então:

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{a x^2} + b x + c & 2 a x + b \\ \cline{2-2}
- \cancel{a x^2} - b x / 2 & x / 2 + b / 4 a \\ \cline{1-1}
0 + \cancel{b x / 2} + c & \\
\quad - \cancel{b x / 2} - b^2 / 4 a & \\ \cline{1-1}
\qquad - b^2 / 4 a + c &
\end{array}$$

Voltando à expressão (12) e fazendo $P(x) = 0$, temos:

$$d(x) \,.\, q(x) + r(x) = 0 \qquad (15)$$

E da divisão acima temos:

$$\left.\begin{array}{l}
d(x) = 2ax + b \\
q(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{b}{4a} \\
r(x) = \dfrac{b^2}{4a} + c
\end{array}\right\} \qquad (16)$$

Logo, substituindo o conjunto de expressões de (16) em (15), vem:

$$(2\,ax + b)\left(\frac{x}{2} + \frac{b}{4a}\right) + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) = 0$$

$$\therefore \frac{(2\,ax + b)^2}{4a} + \frac{(-b + 4ac)}{4a} = 0$$

$$\Rightarrow (2\,ax + b)^2 = b^2 - 4\,ac$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}$$

E, finalmente, chegamos à formula de Bhaskara para o resolução da equação do segundo grau.

CONCLUSÃO

O método da derivada em comparação com os demais métodos trás uma inovação, ou seja, evita a construção do quadrado perfeito fazendo com que o processo apareça naturalmente.

Outro fato é que o método é mais rico em sua constituição, uma vez que usando o conceito de divisão de polinômios associado à derivada gera um desenvolvimento natural para a dedução da fórmula de resolução da equação do 2º grau.

Por outro lado, didaticamente, pode ser usado no curso de cálculo para ilustrar a aplicação do conceito de derivada além de dar suporte para discussões a respeito da divisão de polinômios pela sua derivada, pois uma pergunta que cabe aqui é essa: por que a divisão do polinômio de grau dois pela sua derivada de primeira ordem gera a possibilidade de se chegar ao cálculo de suas raízes, sendo esse um estudo à parte que apresentaremos em um próximo artigo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- AABOE, Asger **Episódios da História Antiga da Matemática.**, Rio de Janeiro: SBM, 1984.
- SANGIORGI, Osvaldo **Matemática:** curso moderno. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969, V.4.
- CASTRUCCI, BENDITO, PERETTI, RONALDO G., Giovanni, José R. **Matemática**: 8ª série, 1º grau. São Paulo: FTD, 1976.
- NETTO, Scipione di Pierro, GÓES, Célia CONTIN. **Matemática na Escola Renovada**: 1ª série do 2º grau. São Paulo: Saraiva, 1973.