# *CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO E SUAS APLICAÇÕES*

Fernando Prado de Andrade
Departamento de Matemática - Centro de Ciências Exatas
Universidade Estadual de Londrina

*"Sendo o pensamento criador a coisa mais importante que estabelece a diferença entre o homem e o macaco, deveria ser tratado como um bem mais precioso que o ouro e preservado com grande cuidado".*
A.D.Hall, A Methodology for Systems Engineering.

**RESUMO:**

Apresentamos neste artigo algumas considerações sobre o conceito de função, bem como as conexões entre os seus processos de ensino-aprendizagem na matemática elementar e na matemática superior.

**ABSTRACT**

The goal of this paper is to present considerations on the concept of function as well as the connections among the processes of teaching-learning in Mathematics in elementary level ang higher education.

## INTRODUÇÃO

As considerações que se seguem visam fundamentar nossos comentários com respeito a um questionário que nos foi entregue e no qual são colocadas várias questões relativas ao processo de ensino-aprendizagem do conceito de função na matemática de primeiro e na de segundo graus. Uma vez que tal conceito surge nos mais diversos campos da Matemática e das suas aplicações às Ciências da Natureza, procuramos abordar o tema tendo em mente esta sua universalidade, como também as conexões entre os seus processos de ensino-aprendizagem na matemática elementar e na matemática superior. O artigo se acha estruturado como se segue. Na seção I mostramos como através dos processos de contagem ee de medida, o conceito de função surge de maneira bastante natural. Na seção II, fizemos uma análise crítica dos processos de ensino-aprendizagem do conceito de função na matemática elementar e na superior e das suas conexões com as aplicações às ciências da natureza. Na seção III e última do artigo

apresentamos de início algumas observações sobre uma divisão da matemática em matemática de aproximação, matemática de precisão e de como a visão que apresentamos nas duas seções anteriores aqui se reflete e de que modo tudo isto pode contribuir para uma mudança de consciência no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem da matemática como um todo nos seus diversos níveis de ensino. Em seguida apresentamos alguns comentários sobre o questionário, tendo resultado uma nossa proposta sobre os conteúdos de matemática atualmente distribuídos nos cursos de primeiro e segundo graus no que diz respeito a quantidade, adequabilidade, atualidade e principalmente qualidade.

**PALAVRAS-CHAVES:** Função, Ensino-aprendizagem.

**KEY-WORDS:** Function, Teaching-learning processes.

## I - OS PROCESSOS DE CONTAGEM E DE MEDIDA E O CONCEITO DE FUNÇÃO

Desde a mais remota antiguidade, contar, por exemplo quantos objetos possui uma dada coleção ou quanto mede a área de determinado terreno, são questões com as quais a humanidade sempre esteve envolvida. Mas de que maneira, questões de natureza tão prática como as citadas, estão relacionadas com o conceito abstrato de função? Como mostraremos nos argumentos que se seguem, o conceito de número é precisamente o elo que nos permite estabelecer tal conexão. O número é a base de toda a Matemática e por conseguinte a linguagem de toda a Ciência. Mas afinal de contas o que é um número? Bem, existem distintas classes de números: naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais, complexos, hipercomplexos, etc.. De todas estas classes de números, a dos números naturais é a mais fundamental, no sentido de que, todas as proposições matemáticas podem ser redutíveis, em última análise, a proposições relativas a tal conjunto de números. Eles são, assim, o pilar básico sobre o qual toda a estrutura da matemática pode ser erigida. Como bem dizia o matemático alemão Leopold Kronecker (1823-1890) «Deus criou os números naturais, tudo o mais é obra do homem». Como veremos, os números naturais são a base do processo de contagem, enquanto que o surgimento de grandezas incomensuráveis com uma dada unidade de medida, nos permite considerar os números irracionais, e com isto estabelecer o conjunto protótipo das medidas do mundo real, os números reais (número real em oposição a número imaginário). Passemos então à descrição dos processos de contagem e de medida e de que maneira tudo isto se relaciona com o conceito de função.

O Processo de contagem surge quando necessitamos conhecer a quantidade de elementos de uma dada coleção ou conjunto de objetos. Ele consiste em estabelecer uma correspondência um-a-um ou entre os elementos de tal coleção e o conjunto dos números naturais $\{1,2,...,n\}$, ou entre os seus elementos e todo o conjunto de números naturais $N=\{1,2,3,...\}$. No primeiro caso o conjunto diz-se contável finito ou simplesmento finito, sendo então neste caso n o seu número de elementos; enquanto que no segundo caso, ele diz-se contável infinito ou enumerável. Desse modo, e em geral, um conjunto diz-se contável se ele for finito ou enumerável. Um exemplo de conjunto finito é aquele que consiste dos alunos matriculados em uma dada escola, enquanto que um exemplo típico de conjunto enumerável nos é dado pelos números inteiros pares $\{2, 4, 6, ...\}$. No primeiro caso, a correspondência um-a-um está dada por $1 \leftrightarrow a_1, 2 \leftrightarrow a_2, ..., n \leftrightarrow a_n$, onde n é o número de alunos da escola ou a cardinalidade de tal conjunto. No segundo exemplo a correspondência um-a-um está dada por $n \leftrightarrow 2_n$ onde n é um número natural. No caso geral, se A for um conjunto enumerável, podemos então explicitar os seus elementos na forma de uma sequência: $a_1, a_2, a_3$ ... etc; sendo este outro modo de conceituarmos conjunto enumerável. Neste caso, tal conjunto diz-se possuir a cardinalidade do enumerável. Vemos assim que o conceito de número natural é a base do processo de contagem, e desse modo o fundamento desse tipo particular de função.

O Processo de medida surge quando, por exemplo, desejamos obter uma representação geométrica dos números naturais sobre uma reta R. Para isto, devemos primeiro selecionar, ainda que arbitrariamente, uma unidade de medida de comprimento - centímetro, metro, polegada ou ano-luz (um ano-luz é a distância que a luz percorre em um ano) - à qual designamos a medida 1. Escolhida também uma origem 0, dispomos os números naturais, a partir desse ponto, de modo que o número 1 esteja a uma unidade de medida de 0, o número 2 a duas unidades de medida de 0 e assim por diante. Desse modo, a imagem obtida dos números naturais, nesta representação, é a de um conjunto de pontos sobre a reta R dada, distribuídos de maneira esparsa e na qual a 'distância' entre dois números naturais consecutivos é igual à unidade de medida. Mais uma vez obtemos uma correspondência um-a-um, desta feita entre os números naturais e os pontos da reta que os representam. Vale neste ponto salientar que, como bem disse Kronecker, os números naturais são uma 'criação de Deus', enquanto que sua representação geométrica numa reta, como uma coleção de pontos dessa reta, isto já é 'obra do homem' (e da mulher também! Por que não?)

Da representação geométrica dos números naturais assim obtida vemos que aqueles pontos da reta R, situados entre dois quaisquer naturais consecutivos, não correspondem a nenhum número natural. Desta forma, para que tenhamos uma correspondência um-a-um entre tais pontos e o sistema de números, devemos considerar outras classes de números que não os naturais. Esta extensão primeiro se dá em nossa vida diária no processo de medir grandezas outras que não de comprimento, tais como, área, volume, massa, tempo, etc.. Para isto, reduzimos de início o processo de medida àquele de contagem. Como fizemos antes, também aqui selecionamos, de maneira arbitrária, uma unidade de medida - centímetro, quilometro, grama, kilo, ou segundo - à qual designamos a medida um. Em seguida contamos o número dessas unidades as quais juntas perfazem a grandeza a ser medida. Pode ocorrer que ao pesarmos um dado pedaço de madeira, por exemplo, resulte em exatas 450 g; mas em geral, entretanto, o processo de contar as unidades pode não resultar numa medida exata da grandeza dada e o máximo que podemos dizer é que a sua medida situa-se entre dois múltiplos sucessivos dessa unidade, digamos entre 449 e 451 gramas. Quando isto ocorre, o passo seguinte consiste em se introduzir novas sub-unidades, obtidas subdividindo a unidade original em um número, digamos, de n partes iguais. Por exemplo, o grau pode ser subdividido em decigraus, centigraus, miligraus; o metro, em decímetro, centímetro, milimetro; a hora, em minutos, segundos, etc.. Em termos matemáticos, entretanto, uma sub-unidade obtida dividindo-se a unidade original em n partes iguais é denotada por 1/n; e se uma dada grandeza contém exatamente m dessas sub-unidades, sua medida é denotada por $\frac{m}{n}$. Este símbolo é chamado uma fração ou a razão entre os números naturais m e n. A seguinte e decisiva etapa só foi conscientemente tomada após séculos de imenso esforço: o símbolo m/n foi destituído de sua referência concreta ao processo de medida e às grandezas medidas, e em vez disso ele foi considerado como um número puro, uma entidade em si mesma, tratada no mesmo pé de igualdade que os números naturais. Quando m e n são números naturais, o símbolo m/n é chamado número racional (racional significando a proporção relativa das medidas de duas grandezas).

De posse da representação geométrica dos números naturais obtida anteriormente, podemos proceder à interpretação geométrica dos racionais (positivos), sobre a mesma reta R. Para representar frações com denominador n, dividimos cada um dos segmentos de comprimento unitário em n partes iguais; os pontos da subdivisão representam então as frações com denominador n. Agora fazendo isto para todo número natural n, resulta que todos os números racionais (positivos) serão representados por pontos sobre a reta R. Tais pontos são chamados de pontos racionais de R. Com isto, fica estabelecida uma correspondência um-a-um entre os números racionais m/n e os pontos racionais da reta R. Duas características dos números racionais sobressaiem-se com relação aos números naturais. Em primeiro lugar, entre dois números naturais dados pode não existir nenhum outro número natural; mas seguramente, entre dois quaisquer racionais a e b sempre existem infinitos números racionais; pois, o ponto médio de a e b, c=(a+b)/2 é racional e situa-se entre a e b. Tomando os pontos médios de a e c, de b e c e continuando com este processo, podemos obter qualquer número de pontos racionais entre a e b. Por outro lado, enquanto que os números naturais são representados esparsamente sobre a reta R, os racionais estão profusamente distribuídos sobre ela. Isto é fácil de se mostrar, bastando observar que todo ponto de R é ou uma extremidade ou um ponto interior de um dos intervvalos unitários da subdivisão que consideramos antes. Subdivindo-se cada um desses intervalos em n partes iguais, obtemos uma subdivisão de R em intervalos de comprimento 1/n por pontos racionais da forma m/n. Desse modo, todo ponto P de R é então ou um ponto racional da forma m/n ou está entre dois pontos racionais sucessivos m/n e (m+1)/n da subdivisão. Desde que pontos sucessivos da subdivisão estão a 1/n unidades um do outro, segue-se que podemos encontrar um ponto racional m/n cuja distância de P não excede 1/n unidades. Observemos que embora não estejamos afirmando que todo ponto de R seja racional (e de fato não o é!), no entanto pontos racionais podem ser encontrados arbitrariamente próximos de qualquer ponto P de R, sendo este o significado emprestado quando dizemos que os pontos racionais estão profusamente distribuídos na reta R ou em outras palavras tal conjunto de pontos é denso na reta R.Muito embora os pontos racionais se encontrem profusamente distribuídos em R, no entanto tal conjunto de pontos está em correspondência um-a-um com os naturais; quer dizer, tal conjunto é enumerável. Esta foi uma das primeiras descobertas de Georg

Cantor em sua análise do infinito. Antes de apresentarmos a demonstração deste fato, devemos observar que os pontos racionais de R ou o que é o mesmo, os números racionais, não podem ser arranjados em "ordem de tamanho", como fazemos com os naturais, dizendo que r é o primeiro número racional, s o seguinte maior que s, e assim por diante; porque existem infinitos racionais entre quaisquer dois dados, e desse modo não existe "o maior seguinte". Mas, como mostraremos em seguida, é possível escrever os números racionais como uma sequência $r_1$, $r_2$, $r_3$, ... tal como fizemos com os naturais; na qual temos descartado a relação de magnitude entre elementos sucessivos. Nesta sequência existirá um primeiro número racional, um segundo, um terceiro, etc. e todo número racional aparecerá exatamente uma vez. Vamos apresentar a demonstração para os números racionais postivos.

Todo número racional positivo é da forma m/n onde m e n são números naturais, e todos esses números podem ser postos em um arranjo matricial infinito no qual, como regra, m/n se situa na m-ésima coluna e n-ésima linha. Por exemplo 3/8 se situa na 3a. coluna e 8a. linha de tal arranjo de números. De acordo com esta regra, os números naturais m/1 se acham na 1a. linha; os números da forma m/2 na 2a. linha; os da forma m/3 na 3a. linha e assim por diante. Evidentemente que ocorrerão nesta matriz, repetições. Por exemplo, o número 2 aparece na 1a. linha e 2a. coluna e também como 4/2, 8/4, etc.. Eliminando-se tais repetições podemos escrever a sequência $r_{11}$, $r_{21}$, $r_{12}$, $r_{13}$, $r_{31}$, $r_{41}$, $r_{32}$, ..., onde $r_{ji}$ representa o elemento situado na j-ésima coluna e i-ésima linha; ou o que é o mesmo: 1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3, ... a qual contém cada número racional positivo, uma e uma única vez. Isto então estabelece que os racionais positivos são enumeráveis.

Isto posto, uma questão que se coloca naturalmente é a de se saber se existe uma correspondência um-a-um entre os pontos de R e os seus pontos racionais. Esta questão foi respondida de maneira negativa pelos matemáticos e filósofos gregos da Escola Pitagórica, cinco séculos antes de Cristo. Eles fizeram a surpreendente e profundamente excitante descoberta que existem grandezas as quais não são comensuráveis com uma dada unidade. Em particular, existem segmentos de reta os quais não são múltiplos racionais de um dado segmento unitário. Desse modo, muito embora os números racionais estejam distribuídos densamente sobre a reta R, eles não são suficientes, como uma base teórica, para o processo de medida expresso por números. Duas grandezas cuja razão é um número racional são chamadas "comensuráveis", porque elas podem ser expressas como múltiplos inteiros de uma unidade comum. Esta revelação dos Pitagóricos, foi um evento científico da mais alta importância, a qual com certeza afetou profundamente a matemática e a filosofia desde esses tempos até os dias de hoje.

Um exemplo de um comprimento incomensurável com a unidade consiste da diagonal de um quadrado com lados de comprimento unitário; pois pelo teorema de Pitágoras, o quadrado deste comprimento deve ser igual a 2. Desse modo se d fosse um número racional e consequentemente igual a m/n, onde m e n são números naturais, teríamos $d^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$. Podemos admitir que m e n não tem fatores em comum, pois se isto ocorrer eles seriam cancelados desde o início. Desta forma de $m^2 = 2n^2$, segue-se que $m^2$ é um número par; portanto m deve ser par, digamos m=2k. Substituindo este valor de m em $m^2 = 2n^2$ resulta que $2n^2 = 4k^2$ e assim $n^2 = 2k^2$ é um número par e consequentemente n é par. Isto prova que m e n tem ambos o fator 2. Entretanto, isto contradiz nossa hipótese de que m e n não tem fatores em comum. Desde que a suposição de que a diagonal pode ser representada por uma fração ou número racional conduziu a uma contradição, ela é portanto falsa. Desse modo o símbolo $\sqrt{2}$ não pode corresponder a qualquer ponto racional da reta R ou o que é o mesmo a nenhum número racional. Assim, o sistema de pontos racionais da reta R, enquanto denso, não cobre todo o eixo numérico. Na realidade, as grandezas incomensuráveis são, como veremos em seguida, mais comuns que as comensuráveis. Uma vez que nosso princípio orientador em introduzir as frações ou números racionais (positivos), foi o processo de medir comprimentos por números, e como desejamos a continuidade de tal princípio ao lidarmos com grandezas incomensuráveis com uma unidade, para que exista uma correspondência um-a-um entre números por um lado e pontos da reta R por outro, é necessário introduzir os números irracionais; os quais, irão representar os segmentos incomensuráveis com a unidade. Devemos chamar a atenção para o fato de que temos considerado até o momento somente aqueles números, racional ou irracional, ditos positivos; pois, os mesmos tem sido introduzidos através dos processos básicos de contagem e medida, o que é natural. No entanto, quando doravante nos referirmos aos sistemas numéricos estaremos levando em conta também os números negativos, que são representados no eixo R, à esquerda da origem O. Eles são então introduzidos através do processo de simetria com respeito à origem O e devem assim ser considerados. Foi admitido então, por uma questão de rumo, que a cada ponto sobre a reta R lhe corresponde de modo único um número racional ou irracional e esta totalidade de números reais foi denominada o "continuum real" e denotado com a mesma letra R, com a qual temos designado o nosso eixo de representação dos números desde o início. Além disso foi admitido também que tais números reais obedecem as mesmas leis aritméticas que aquelas dos números racionais. Somente no século dezenove, através dos trabalhos de Cantor, Dedekind e outros, as bases de tal sistema de números foram assentadas, e a partir daí o sistema de números reais tornou-se um consistente e completo instrumento para medidas científicas, permanecendo válidas, como já salientamos, as regras de cálculo do sistema dos números racionais.

Como salientamos anteriormente, as grandezas incomensuráveis são mais comuns do que as comensuráveis. Isto será posto em evidência mostrando-se que o conjunto de todos os números reais não é enumerável. Em outras palavras, a totalidade dos números reais apresenta um tipo radicalmente diferente de infinito que aquele dos números naturais ou dos números racionais. A prova, engenhosa e indireta de Cantor, deste fato tem permanecido um modelo para muitas demonstrações matemáticas, tendo passado à posteridade sob a denominação de "processo diagonal de Cantor" . Desejamos demonstrar que o conjunto dos números reais R não é enumerável e começamos admitindo que R fosse enumerável, o que significa que todos os números reais podem ser dispostos numa sequência do tipo:

$$x_1 = N_1, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

$$x_2 = N_2, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

$$x_3 = N_3, c_1 c_2 c_3 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

onde os N's denotam as partes inteiras e as letras pequenas denotam os digitos após a vírgula. Para evitar ambiguidades na numeração acima, tais como 0,5 e 0,4999... representando o mesmo número racional, substituiremos todas as frações finitas por seu equivalente não-finito, como no exemplo considerado. O ponto essencial da demonstração é construir um novo número x o qual não esteja incluído nesta sequência. Sendo assim, x é definido por um algorítmo que recebeu o nome de "processo diagonal de Cantor". Seja então

$$x = 0, abcd \ldots,$$

onde escolhemos o digito a o qual difere de $a_1$ e também não é zero nem nove (para evitar possíveis ambiguidades tais como: 0,999... = 1,000...); o digito b diferente de $b_2$ e mais uma vez também de zero e nove; similarmente c diferente de $c_3$, e assim por diante. Observe que $a_1$, $b_2$, $c_3$, são os elementos diagonais. Daí o nome "processo diagonal".

Portanto, o número real x acima definido através de uma fração decimal com um número infinito de algarismos significativos é distinto de qualquer dos números da sequência $x_1$, $x_2$, $x_3$, ...; porque, duas frações decimais com um número infinito de algarismos significativos são iguais se, e somente se, forem identicos algarismo por algarismo; porém, x difere de $x_1$ no primeiro digito ou algarismo, de $x_2$ no segundo digito e, em geral, de $x_n$ no n-ésimo. Desta forma, provamos assim a existência de um número real x que não está na sequência apresentada e isto contradiz a suposição de que o conjunto dos números reais é enumerável. Assim, a suposição de que uma enumeração dos números reais é possível, mostra-se inatingível, e portanto a sua negação, isto é, a afirmação de Cantor de que o conjunto dos números reais é não enumerável é verdadeira. Portanto, já que o conjunto dos números reais R é a união disjunta dos números racionais e irracionais e por ser o primeiro de tais conjuntos enumerável, segue-se que existem mais pontos irracionais na reta R que racionais; assim as grandezas incomensuráveis são mais comuns que as comensuráveis.

As considerações anteriores sobre os processos de contagem e de medida nos conduziram, quando da representação, sobre uma dada reta R, dos números naturais, racionais e reais, de modo completamente natural ao importante conceito de correspondência um-a-um ou biunívoca, a qual contém em si mesma o próprio conceito de função e uma sua classificação. De fato, quando, por exemplo, "estabelecemos" a correspondência um-a-um entre os números reais, o qual denotaremos nos argumentos que se seguem por $R_0$, e os pontos da reta R, isto pode ser formalizado escrevendo-se $f : R_0 \to R$, onde todo numero real x de $R_0$ corresponde a um e somente um ponto P da reta R, e reciprocamente, todo ponto P de R corresponde a um único número real x de $R_0$. Na realidade quando afirmamos que para todo x de $R_0$, existe um único ponto P de R, e portanto bem definido, estamos explicitando o próprio conceito de função. Mas isto é a metade da história. A outra parte nos diz que para todo ponto P de R existe um número real x de $R_0$ que lhe corresponde, ou seja, tal que $f(x) = P$; e temos desse modo que a função é sobrejetiva. Além disso, tal x de $R_0$ e para o qual $f(x) = P$ não pode provir de números reais distintos x e y de $R_0$; ou ainda, se os números reais x e y de $R_0$ são tais que $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$ na reta R; e temos desta forma que a função f é injetiva. Uma função que é simultaneamente injetiva e sobrejetiva é denominada, como sabemos, função bijetiva. Isto posto, outro nome para correspondência um-a-um ou biunívoca entre dois conjuntos é o de função bijetiva. Devemos acrescentar a tudo isto que em toda a matemática e suas aplicações às ciências da natureza, essencialmente trabalhamos com dois tipos gerais de função: as funções cujos domínios são discretos (e.g. os naturais) e as funções cujos domínios são um continuum (e.g. os números reais), o que é bastante natural dentro da abordagem que temos apresentado. Um conjunto X de pontos da reta R diz-se "discreto" se todos os seus pontos forem isolados, quer dizer, dado x em X existe um intervalo da forma (x-r, x+r), para algum r ; 0, tal qual que (x-r, x+r)={x}. Exemplos de conjuntos discretos são os conjuntos com um número finito de elementos, os números naturais, etc.. Por outro lado, um "continuum" de pontos de R é um conjunto X que só possui um pedaço e não apresenta falhas ou buracos. Exemplos de tais conjuntos são os intervalos da reta, a própria reta, etc.. As funções $f : N \to R$, onde N é conjunto dos números naturais e R o conjunto dos números reais, são denominadas de sequências e as mesmas são de grande utilidade no estudo das funções $f : R \to R$, ou seja, das funções definidas no continuum real.

Uma vez que o conceito de função ocupa um lugar proeminente em todo o sistema de ensino da matemática, vamos encerrar estas considerações iniciais apresentando um esboço do seu desenvolvimento histórico. Seguindo tal desenvolvimento observamos que o conceito de função era somente utilizado em exemplos isolados tais como potências, funções trigonométricas, etc., como fizeram Leibnitz e os Bernouillis. Uma formulação geral de tal conceito surgiu pela primeira vez no século dezoito. Euler, em torno de 1750, encontrou duas explanações diferentes de palavra função. Em sua obra Introductio, ele define, y como uma função de x, a toda expressão analítica em x; quer dizer, toda expressão a qual é constituída de potências, de logaritmos, de exponencial, etc. de x; mas ele não indica precisamente que combinação de tais expressões devem ser admitidas. Entretanto, ele já faz a divisão, hoje familiar, em funções algébricas e transcendentes. Ao mesmo tempo, para Euler, uma função y(x) era definida quando uma curva qualquer era traçada em um sistema x, y de coordenadas; quer dizer, uma função era uma "curva quaecunque libero manus ductu descripta". Lagrange, em torno de 1800, em sua 'Théorie des Fonctions Analytiques', restringe a noção de função, em comparação com a segunda definição de Euler, confinando-a às assim chamadas "funções analíticas", as quais são definidas por séries de potências em x, que nada mais são que polinômios de "grau infinito"; quer dizer, $v=P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ . Na atualidade foi retida a denominação "função analítica" com este mesmo significado, no entanto tal tipo de função é tão somente uma classe especial das funções que realmente ocorrem em Análise. Devemos aqui observar que uma série de potências como a considerada, define uma função tão somente na sua região de convergência, isto é, em um certo intervalo em torno de $x = 0$. Entretanto, descobriu-se um método, para estender ou prolongar essa região de definição para a função $y = P(x)$. Se, digamos, $x_1$ está na região de convergência de P(x), e se P(x) é resolvida em uma nova série $y = P_1(x-x_1)$, em termos das potências de $(x-x_1)$, é possível que esta possa convergir em uma região estendendo a primeira, e portanto podemos definir $y = P(x)$ em um domínio maior. Uma repetição deste processo pode estender o domínio de convergência de P(x) ainda mais. Em essência, este é o método de prolongamento analítico, o qual é bem conhecido de todo aquele familiarizado com a teoria de funções analíticas. Desta forma, uma função (analítica) no sentido de Lagrange, está determinada em todo um domínio se a conhecemos em um segmento arbitrariamente pequeno desse domínio. Esta propriedade é completamente oposta ao comportamento de uma função no sentido da segunda definição de Euler, pois ai, qualquer parte de uma curva pode ser continuada à vontade. O desenvolvimento adicional do conceito de função é devido a Fourier, um importante matemático francês. Fourier, em sua obra fundamental "Théorie Analytique de la Chaleur" a qual apareceu em 1822, muito embora os seus primeiros resultados concernentes a suas teorias ele tenha apresentado à Academia de Paris em 1807, desenvolveu neste trabalho a teoria matemática da condução de calor. Este trabalho foi a fonte de inspiração dos métodos utilizados na solução de problemas da Fisica-Matemática. Ele é, no dizer do Físico-Matemático alemão Arnold Sommerfeld, "a biblia da Física Matemática". Fourier tratou, em particular, o problema de Condução de Calor o qual, para um simples caso, pode ser estabelecido como se segue. O contorno ou fronteira de uma placa circular é deixado a uma temperatura constante, por exemplo, uma parte está a zero graus centígrados e a outra a cem graus centígrados. Que temperatura estacionária é produzida em decorrência do fluxo de calor resultante? Como vemos, valores de fronteira são introduzidas aqui, os quais podem ser atribuídos independentemente um de cada outro, em partes diferentes da fronteira. Assim, a segunda definição da função de Euler fica mais apropriada neste contexto, que a conceituação apresentada por Lagrange. Nas mãos de Dirichlet esta definição de Euler é essencialmente retomada, exceto que ele transladou-a para a linguagem da análise, ou seja, ele aritmetizou-a. Isto é de fato necessário, pois não importa quão fina uma curva possa ser traçada, ela nunca pode definir exatamente a correspondência entre os valores de x e y. A tinta da caneta ou o traço feito por um lápis, sempre terá uma certa espessura,donde se segue que os comprimentos x e y, os quais correspondem um ao outro, podem ser medidos exatamente somente dentro de certo número limitado de casas decimais. Dirichlet formulou o conteúdo aritmético da definição de Euler da seguinte maneira: se de qualquer forma um valor definido de y é determinado, correspondendo a cada valor de x em um dado intervalo, então y é chamada uma função de x. Muito embora ele tenha enunciado esta noção muito geral de uma função, não obstante ele sempre teve em mente funções contínuas ou então funções que não tivessem descontinuidades em demasia. Somente com a introdução por Cantor da sua teoria de conjuntos de pontos, as funções passaram a ser consideradas como definidas somente para as posições x de algum conjunto arbitrário, de modo que em geral y é chamada uma função de x, quando para cada elemento x de um conjunto de objetos (números ou pontos) lhe corresponde um elemento y de um outro conjunto de objetos. Bem, com relação a este assunto muito se teria ainda a acrescentar. Nas duas partes que se seguem vamos tecer considerações a respeito do processo de ensino-aprendizagem dos aspectos aqui considerados sobre o conceito de função, tanto na matemática elementar quanto na matemática superior.

## II - O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO E SUAS APLICAÇÕES

Vimos na parte anterior como, a partir da contagem de objetos de uma dada coleção e da medida do comprimento de segmentos, o conceito de correspondência um-a-um nos conduziu, via os diversos sistemas numéricos, ao importante conceito de função, o qual se aplica nas situações mais abstratas possíveis. Contudo, surge agora uma importante questão: o que deve o professor ensinar e o estudante aprender sobre tal conceito? Não resta dúvidas de que esta é uma questão assaz muito difícil de respondermos, uma vez que as nossas próprias idiossincrasias possuem aí uma respeitável componente. No entanto, acreditamos que, mesmo assim, podemos expor algumas idéias dentro daquele espírito que temos explorado nas colocações anteriores e nas quais já sobressai o mais importante problema, no nosso modo de entender, já colocado para a mente humana: discretu vis-à-vis continuum, quer dizer, o discreto diante do contínuo. Independente de se estamos tratando o conceito de função na matemática elementar ou na matemática superior, jamais devemos nos esquecer de que a noção geral de função, de acordo com uma ou outra das interpretações de Euler, deve permanecer como um fermento em todo o seu processo de ensino-aprendizagem. Tal conceito nunca deve ser introduzido, como tudo o mais na matemática, por meio de definições abstratas, mas sim deve ser transmitido ao estudante como um processo vivo e dinâmico, por meio de exemplos elementares tirados preferencialmente do seu quotidiano. As abstrações virão depois com o devido tempo, quando a maturidade adquirida através de uma prática continua com exemplos concretos estiver sedimentada. No entanto não se deve, a priori, renegá-la. Elas são necessárias em muitos contextos, tanto da ciência pura quanto da tecnologia. No que diz respeito ao professor de matemática, entretanto, ele deve, como é de se desejar, possuir um embasamento profundo daquilo que está tratando, não somente no nível da sua exposição, mas também mais além, para que com isto, e desnecessário é dizer, possa oferecer dentro do seu processo de ensino uma visão mais penetrante e uma perspectiva ampla daqueles tópicos que estão sendo abordados, para aprendizagem dos seus estudantes. Nos argumentos que se seguem, as funções que consideraremos terão como seus domínios ou um conjunto discreto ou um conjunto contínuo; conjuntos estes constituídos não necessariamente de números.

Na matemática elementar, a nível de primeiro grau, o conceito de função deve ser introduzido através do processo de contagem de conjuntos finitos e também através de simples processos de medidas. Por exemplo, pode-se solicitar aos estudantes que estabeleçam uma correspondência entre os alunos da sua classe designada por A e uma outra classe da mesma escola designada por B de tal maneira que a todo aluno de A corresponda um aluno de B bem identificado. Esta tarefa pode ser colocada como uma atividade-pesquisa, orientado-os de tal maneira que, por exemplo, o número de chamada de cada aluno da classe A, corresponda ao idêntico número de chamada da classe B. Neste exemplo, acreditamos que ocorrerão diferentes situações as quais podem ser exploradas com grande proveito.

Um outro exemplo poderia consistir na determinação da temperatura, dia-a-dia, durante um período de um mês e levá-los a construir uma tabela de valores, relacionando desta forma o dia do mês com a correspondente temperatura. Aqui se encontra uma oportunidade muito boa de alguns conceitos importantes além do de função serem colocados. Por exemplo, como está ocorrendo com certa freqüência, num mesmo dia temos uma flutuação, às vezes grande, da temperatura ambiente e desse modo uma "temperatura média" deve ser considerada para dias como estes. Por outro lado o estudante pode se encontrar na situação em que durante um determinado período do mês, uma semana por exemplo, a temperatura não varia significativamente de modo que se possa considerá-la como constante. Enfim, um contexto como este pode conduzi-los a questionar sobre as causas destas flutuações na temperatura e desse modo motivá-los, quem sabe, a algumas descobertas.

Uma outra situação que pode ser explorada, e talvez resulte, consiste na determinação do peso de cada aluno da classe com respeito à sua altura e em seguida elaborar uma tabela e explorar desta forma a correspondência entre os conjuntos de valores.

Muitas outras situações podem ser exploradas com o objetivo de se por em evidência o conceito de correspondência entre conjuntos de elementos que seja funcional. Nos exemplos que temos considerado os conceitos: domínio, contradomínio e imagem devem ser evidenciados. Mas não é necessário que o domínio de uma dada função seja constituído tão somente por números. Por exemplo, o domínio pode consistir de todos os círculos do plano ou então ele pode consistir de todos os triângulos do plano. Nestes dois últimos exemplos o domínio é um conjunto infinito; contrário ao que temos visto nos exemplos anteriores a estes, neste parágrafo. Uma função f definida no conjunto T de todos os triângulos do plano pode ser a que associa a cada triângulo t o seu perímetro P(t). Observe que neste exemplo, dois triângulos diferentes podem ter o mesmo perímetro; de maneira que a equação $f(t_1) = f(t_2)$ é possível mesmo quando $t_1 \neq t_2$ trata-se assim de uma função que não é injetiva.

Outros exemplos envolvendo a geometria elementar podem, e devem, ser considerados. Pode-se solicitar aos estudantes que "verifiquem" que a área de um quadrado de lado a está dada explicitamente por $S(a) = a^2$. Isto pode ser concretizado considerando-se de início que a medida do lado a do quadrado é um número natural e que um pequeno quadrado de "lado um" tem área igual à unidade. Desse modo, através de um processo de contagem de quadrados eles chegarão à relação funcional desejada.

Quando a medida do lado a do quadrado for um número racional, por exemplo $\frac{3}{4}$, deve-se aqui proceder como indicado a seguir. Considere-se um dado comprimento como a unidade de medida e divide-se este comprimento em quatro partes, tomando-se em seguida três delas. Constrói-se então o quadrado com a unidade de medida escolhida e no outro lado repete-se o processo. Desse modo o quadrado de lado 3/4 ocupa uma área de nove partes de um total de dezesseis partes e assim sua área é $9/16=(3/4)^2$. Poder-se-ia perguntar: e se o número racional expressando a medida do lado do quadrado for tal que o numerador seja maior que o denominador, tal como, por exemplo, 8/3? Bem neste caso procedemos da seguinte maneira: aplicamos o algorítmo de Euclides, encontrando: $8/3 = 2 + 2/3 = 2(1+ 1/3)$; em seguida construimos um segmento de comprimento $1 + 1/3$ e logo um quadrado com lado igual a este comprimento. A área deste quadrado é igual a $7(1/9) + 1 = 16/9$, pois existirão sete quadrados de área $1/9=(1/3)(1/3)$ como excedente da área unitária. Uma vez que $8/3=2(1+1/3)$, segue-se que o quadrado de lado $2(1+1/3)$ terá área igual a quatro vezes a área do quadrado de lado $(1+1/3)$ e assim igual a $4.16/9=64/9$. E assim mais uma vez a área de um quadrado é igual ao quadrado da medida do comprimento de seu lado. Uma vez que estamos procedendo de modo indutivo e construtivo, este processo esbarra em sérias dificuldades de verificação da fórmula $S(a) = a^2$, quando consideramos quadrados cuja medida do lado vem expressa por um número irracional. Muito embora isto possa ser feito como no caso da $\sqrt{2}$ ou mesmo de $\sqrt{p}$ onde p é um número primo, pois todos eles são irracionais construtíveis com régua e compasso, e assim são algébricos, quer dizer são raízes de uma equação do tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ na qual os coeficientes são inteiros (no caso em pauta a equação seria $x^2 - p = 0$ ); no entanto, para números não algébricos ou transcendentes tais como $\pi$ , e, etc os mesmos não são construtíveis. No caso do número $\pi$, a questão da sua transcendência só foi demonstrada no final do século passado e isto resolveu um problema de importância histórica o qual é conhecido como o problema da quadratura do circulo, o qual consistia em saber se era possível construir um quadrado cuja área fosse igual à área de um círculo de raio um. Apesar da fórmula $S(a) = a^2$ ser de verificação impossível, em termos construtivos, em casos como este, contudo é evidente que ela é verdadeira também nestes casos e desse modo deve ser apresentada a sua demonstração. Esta questão de determinação de áreas de figuras planas surgiu de necessidades essencialmente práticas do homem desde a antigüidade. Assim, por exemplo, nos é dada uma região R de formato retangular e se pede a quantidade de trigo necessária para semeá-la. Ora se conhecessemos a área da região R poderemos determinar a quantidade de trigo multiplicando a área de R pela quantidade de trigo necessária para semear uma unidade de área da região R.

Numa segunda etapa do conceito de função na matemática do primeiro grau, o estudante irá ser apresentado às funções: lineares, quadráticas e polinomiais. Sugerimos, mais uma vez, que a abordagem do processo de ensino de tais funções se faça de início para o caso discreto e em seguida para o caso contínuo. Pela primeira vez, de maneira concreta, o estudante irá se defrontar com os conceitos de linear e não-linear. Vejamos como tudo isto pode ser colocado de modo consistente com o nosso ponto de vista, do discreto diante do contínuo. Um simples exemplo de um modelo discreto e no qual a natureza da linearidade se apresenta é aquele das progressões aritméticas. Uma progressão aritmética (p.a.) é uma seqüência de números reais cujos termos são formados de tal maneira que "a diferença entre qualquer termo da seqüência e o anterior seja uma constante", digamos a qual chamamos de razão da proporção; quer dizer, uma p.a. pode ser descrita pela seqüência: $a_n$ onde $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r, \ldots, a_n = a_{n-1} + r = a_1 + r(n-1)$. Aqui surge a oportunidade, talvez pela primeira vez, de se apresentar uma demonstração por indução matemática, estabelecendo-se que o termo geral desta seqüência esta dado para todo n natural por: $a_n = a_1 + r(n-1)$; termo este que foi obtido passo a passo (indução empírica) diretamente da definição de uma p.a.. Como vemos, já que o primeiro termo $a_1$ e a razão r são fixos para uma dada p.a., o termo geral $a_n = f(n)$. Aqui introduz-se um sistema de coordenadas cartesianas e procede-se à representação gráfica de tal função da variável discreta n. Pois bem, em tal representação consideremos os pontos do plano $A_1 = (1, a_1)$, $A_2 = (2, a_2) = (2, a_1 + r)$ e $A_3 = (3, a_3) = (3, a_2 + r)$. Introduzindo-se as relações métricas num triângulo retângulo, e esta é uma oportunidade excelente, determinemos a declividade dos segmentos que ligam os pontos $A_1$ a $A_2$ e $A_2$ a $A_3$. Feitos os cálculos, e chamando de $tg\alpha$ a declividade do segmento $A_1A_2$ e $tg\beta$ a declividade do segmento $A_2A_3$, obtemos que $tg\alpha = tg\beta$. Se prosseguirmos, considerando mais e mais pontos, vamos obter que todos os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots$, An estão alinhados ou seja situam-se sobre uma mesma reta; pois a inclinação ou declividade dos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ é a mesma. Aí está, portanto, um exemplo concreto de um modelo linear. Vejamos em seguida um outro exemplo ainda no âmbito das sequências. Consideremos agora as progressões geométricas (p.g.). Uma progressão geométrica é uma seqüência de números reais $(a_n)$ cujos termos $a_n$ são formados de tal maneira que "o quociente entre qualquer termo da seqüência e o anterior seja uma constante", digamos q, a qual chamamos de razão da progressão; quer dizer, uma p.g. pode ser descrita pela seqüência $a_n: a_1, a_2, a_3, \ldots$, onde $a_2 = a_1q$, $a_3 = a_2q = a_1q2, \ldots, a_n = a_1q^{n-1}$. Mais uma vez deve-se usar uma demonstração por indução matemática aplicada ao termo geral $a_n = a_1q^{n-1}$. Novamente, já que o primeiro termo $a_1$ e a razão q são fixos, tem-se que $a_n = f(n)$. Procedendo-se como fizemos no caso de uma progressão aritmética, representamos os pontos $B_1 = (1, a_1)$, $B_2 = (2, a_1q)$, $B_3 = (3, a_1q^2)$, num sistema de coordenadas cartesianas. Por exemplo se considerarmos que q=2;1 e $a_1$;0, e determinarmos a declividade dos segmentos $B_1B_2$ e $B_2B_3$ encontramos que $tg\alpha = 2a_1$ e $tg = 4a_1$, respectivamente; isto é, a declividade dobra do segmento $B_1B_2$ para o segmento $B_2B_3$. Desse modo, os pontos considerados não estão alinhados ou não se situam sobre uma mesma reta. Isto vai ocorrer para todos os segmentos de reta construídos consecutivamente; quer dizer, os segmentos $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \ldots, B_{n-1}B_n$ são tais que a declividade dobra, de um segmento para o seguinte imediato. Neste caso, muito embora os pontos da seqüência $B_{n-1}B_n$ quando ligados formem uma poligonal, a curva que liga "de modo suave" esses pontos não é uma reta. Este então é um exemplo típico de um modelo não-linear. Muitas questões evidentemente podem ser colocados neste ponto. Por exemplo, quando q;1 os pontos Bn do plano, formam uma seqüência cuja declividade dos segmentos $B_{n-1}B_n$ é crescente; enquanto que para $0<q<1$ eles formam uma seqüência cujas declividades são decrescentes.

Os tipos de curva que passam pelos pontos $(A_n)$ ou $(B_n)$ do plano cartesiano ou que "melhor os aproximam", são gráficos de funções de variável contínua; ou seja, de funções reais de variável real. Por exemplo, determinemos uma função f(x) da reta real R nela mesma, que "passa" pelos pontos $(A_n)$, obtidos via a progressão aritmética considerada. Pelo que sabemos, a declividade da reta ligando tais pontos é constante e igual a, digamos tg e desse modo o segmento AB, situado sobre esta reta, ligando os pontos $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x,y)$ possui esta declividade e tem-se: $tg\alpha=y-y_1/x-x_1$. Por exemplo, se os pontos A e B forem pontos da seqüência $(A_n)$ e se $A=(1,a_1)$ e $B=(n,a_n)$, tem-se que $tg\alpha = an-a_1/n-_1$, ou seja: $a_n=a_1+tg\alpha.(n-1)$, e assim, a razão r da p.a. está dada por $r = tg\alpha$. Voltando ao caso que estávamos tratando, tem-se que $y = y_1 + tg\alpha\ (x - x_1)$ e colocando $tg\alpha=a$ e $y_1- x_1tg\alpha=-b$ resulta a expressão $y=A(x)=ax+b$, denominada na literatura de "função afim" (linear + uma constante). A parte $L(x) = ax$ é denominada de linear e a parte $C(x) = b$ de constante (não poderia ser chamada de outra coisa!). Desse modo $A(x) = L(x) + C(x)$, e assim as funções afins reais são representadas graficamente por retas no plano. As funções $L(x)=ax$, por retas que passam pela origem, enquanto que $C(x) = b\ \ 0$ por retas paralelas ao eixo horizontal. Muitas vezes desejamos determinar o ponto de interseção da função $y = f(x) = ax + b$ e o eixo real; quer dizer desejamos encontrar x para o qual $f(x) = 0$. Neste caso é muito simples e x vem dado por $x = -b/a$ (quando $a\neq0$); mas existem situações, como veremos, que são bastante complicadas. Esses pontos são muito importantes de serem determinados, pois eles nos fornecem informações úteis sobre as funções com as quais estivermos tratando no momento. Neste caso a equação surgiu quando da determinação dos zeros de $f(x)=ax+b$ (que no exemplo para $a\neq0$ é único); no entanto, funções podem resultar do processo de explicitarmos uma dada variável, numa equação a duas variáveis por exemplo, em termos da outra. Trataremos disto quando o momento se apresentar, mas desde já deve ficar claro que aos conceitos não se deve aplicar o critério de um ser mais relevante que outro, pois isto vai depender do contexto em que estivermos; quer dizer existem situações nas quais a relação entre variáveis dada por uma equação do tipo $F(x,y)=0$ é o que nos interessa, muito mais do que termos explicitamente y em termos de x, ou seja, $y=f(x)$. Mas, algumas vezes poderemos estar interessados nos dois aspectos.

No caso dos termos da seqüência $B_n=(1,a_n)$ de pontos do plano, que temos considerado antes, e para os quais $a_n=a_1q^{n-1}$ (n=1,2,3,...) são os termos de uma progressão geométrica, a situação pode ser ilustrada considerando-se $a_1=q=2$ e desse modo a seqüência $B_n$ passa a ser $B_n=(n,2n)$. É claro que neste caso, como sabemos, a função de variável contínua passando por tais pontos é $f(x)=2^x$. Mas a esta altura dos conhecimentos matemáticos dos estudantes, a expressão $2^x$ para x real qualquer é algo estranho. Por exemplo, nesta altura, algo como $2^\pi$ ou $2^{\sqrt{\pi}}$ não teria como ser justificado. No entanto esta oportunidade pode ser aproveitada para analisar através de aproximações lineares e efetuando interpolação para valores racionais do argumento de $f(n)=2^n$, estas aproximações lineares em cada intervalo [n, n+1]. Assim, por exemplo, para $n = \frac{3}{2}$, temos

$f(\frac{3}{2}) = 2^{3/2} = \sqrt{8}$ e assim de posse de uma calculadora, pode-se montar uma tabela considerando-se o mesmo processo aplicado aos intervalos [1, 3/2] e [3/2, 2] e assim por diante. Isto conduzirá o estudante a perceber, ou ser induzido a, que em intervalos de comprimento cada vez menores, pode-se substituir "um pedaço" da possível curva ligando os pontos da seqüência $B_n$, por "um segmento linear"; e desse modo a curva, por exemplo, no trecho [1, 2], está composta de pequenos segmentos retilíneos justapostos, aos quais é dada uma certa dobra ou curvatura.

O passo seguinte é introduzir os primeiros exemplos de funções não lineares tais como $f(x) = x^2$, $x^3$, $x^4$, etc. e de um modo mais geral as funções polinomiais: $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$, onde os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais. Aqui o procedimento deve ser também fabricar tabelas para valores de x inteiro: $x=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,...$ e observar o gráfico de $f(n)=n^2$, ponto a ponto e daí induzir, desde já, algumas propriedades de tal função tais como simetria com respeito ao eixo y, passa pela origem, não injetividade, etc.. Em seguida deve-se aplicar interpolação linear nos diversos intervalos e obter mais valores de f(n) agora para n racional e com isto um melhor esboço do gráfico de $f(n)=n^2$. Daí a curva contínua pode ser inferida como uma conseqüência natural. Existem pequenas calculadoras programáveis que executam gráficos de uma maneira precisa e que devem ser utilizadas como um instrumento no processo de ensino-aprendizagem de toda a matemática. Em se considerando a função quadrática completa $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ ou como comumente se escreve: $f(x)=ax^2+bx+c$ muitas questões interessantes surgem. A mais importante delas, segundo nosso entendimento, diz respeito exatamente em encontrar os seus zeros ou seja aqueles x reais para os quais a equação $f(x)=ax^2+bx+c=0$, está satisfeita. Isto porque tal problema nos leva a considerar o prolongamento do sistema dos números reais para a solubilidade de equações reais. Isto se dá já no caso tão simples como o da equação $x^2+1=0$. Ora, das considerações sobre a função $f(x)=x^2$ já sabemos que $x^2 \geq 0$ para cada x real e desse modo não pode existir um número real x satisfazendo $x^2+1=0$ ou equivalentemente $x^2=-1$; pois, senão viria $0 \leq x^2=-1$, o que não pode ocorrer. Tal número denotamos por i e por definição $i^2=-1$. Aqui cabem duas colocações. Em primeiro lugar, vemos a importância ocupada neste caso por uma equação, resultante da determinação dos zeros da função $f(x)=x^2+1$. Ela nos conduziu a considerar números outros que não os reais. Isto já é o bastante. Por outro lado, a maneira como esta extensão está sendo considerada é totalmente abstrata e nada tem em comum com os processos de contagem e medida, que lançamos mão quando tratamos dos outros sistemas numéricos. Se bem que, na mesma linha abstrata de introduzir a unidade imaginária i acima, através da solubilidade de uma equação, poderíamos, dados os números naturais, proceder à introdução dos inteiros negativos procurando soluções da equação x+n=m, onde m e n são naturais e n;m; a qual não possui solução, dada por um número natural. Assim, introduzindo os inteiros negativos, equações desse tipo passam a ser solúveis; uma equação do tipo nx=m, onde m e n são inteiros tem, em geral, soluções não inteiras dadas por $x=m/n$ $(n \neq 0)$; e desse modo, somos conduzidos aos números racionais. Prosseguindo nesta linha de argumentação, a equação $x^2-2=0$ não possui solução racional e assim pela introdução do irracional $\sqrt{2}$ ela passa a ser solúvel, conduzindo-nos assim a considerar a classe dos números irracionais. Este processo de ampliação dos sistemas numéricos via a solubilidade de equações, sendo de natureza abstrata, não se presta para a introdução do estudante neste nível aos diversos conjuntos numéricos. Ele mesmo já perssupõe o conceito de função, o qual surge, como vimos na parte 1, de modo natural sob a ótica dos processos de contagem e medida. Entretanto ele deve ser apresentado quando a ocasião for apropriada, por exemplo, na última série do primeiro grau no momento em que se estiver analisando o comportamento das funções quadráticas.

Na matemática elementar a nível de segundo grau, o processo de ensino-aprendizagem do conceito de função deve dar continuidade aos estudos desenvolvidos anteriormente. Assim é que, deve-se iniciar o seu estudo pelas funções polinomiais $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...a_nx^n$ ($a_n \neq 0$), as quais são construídas por aplicação repetida das operações elementares de adição e multiplicação aplicadas a uma variável independente x e a um conjunto de números reais ou complexos $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$. Este exemplo das funções polinomiais se constitui no tipo mais simples das funções da matemática no sentido de que elas são as mais básicas dentre todas. Uma vez que tais funções são geradas através da repetição das operações elementares de adição e multiplicação, elas são denominadas de funções elementares. Existem aqui algumas colocações que gostaríamos de fazer. Em primeiro lugar, o estudo de tais funções deve ser precedido por um estudo detalhado do sistema dos números complexos, pois dentro de tal sistema de números, não somente é toda equação da forma $ax^2+bx+c=0$ solúvel, mas muito mais que isto é verdade; toda equação algébrica de grau n com coeficientes reais ou complexas, $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$, tem soluções neste sistema. Para equações de terceiro e quarto graus isto foi estabelecido no século dezessete por Tartaglia, Cardano, e outros, que resolveram tais equações através de fórmulas essencialmente similares àquelas para equações quadráticas, muito embora mais complicadas. Por quase duzentos anos as equações gerais de quinto grau e graus superiores foram intensivamente estudadas, no entanto todos os esforços para resolve-las por métodos similares falharam. Quando Gauss em 1799 em sua tese de doutorado mostrou que "para qualquer equação algébrica da forma considerada antes, onde n é um inteiro positivo e os coeficientes $a_n$'s são quaisquer números reais ou complexos, existe pelo menos um número complexo z para o qual $f(z)=0$"; isto se constituiu uma grande realização. Apesar disto a questão de generalizar as fórmulas clássicas, as quais expressam as soluções de equações de grau menor que cinco em termos das operações racionais mais extração de raiz, permaneceu sem resposta nesse tempo. Foi somente no século dezenove que Ruffini e Abel conceberam a idéia revolucionária de provar a "impossibilidade da solução de equações algébricas de grau n por meio de radicais". Deve ficar claro que a questão não era de se saber se qualquer equação algébrica de grau n "possui" solução. Isto já tinha sido estabelecido por Gauss como salientamos antes. Portanto, não existiam dúvidas sobre a "existência" das raízes de uma equação, especialmente porque essas raízes podem ser determinadas, com qualquer grau de precisão, lançando-se mão de métodos numéricos. Mas o problema de Abel e Ruffini era bem diferente: pode a solução ser efetivada tão somente por meio de operações racionais e radicais? A procura de uma resposta para esta questão inspirou o desenvolvimento da álgebra moderna e da teoria dos grupos nas mãos de Ruffini, Abel e Galois. Voltando ao teorema de Gauss, ele tem como uma consequência importante, a fatoração de um polinômio ou função polinomial $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ na forma $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$, onde $a_1$, $a_2$,..., $a_n$ são números complexos, as raízes da equação $f(x)=0$. Este resultado é denominado de Teorema Fundamental da Álgebra. Talvez fosse mais apropriado chamá-lo de Teorema Fundamental do Sistema de Números Complexos. É evidente que, a nível da matemática do segundo grau, não se pode apresentar uma demonstração do Teorema de Gauss; todavia, a sua conseqüência, tanto pode quanto deve ser demonstrado. Com relação ainda aos números complexos, uma outra questão que gostaríamos de salientar, é a da importância que tal sistema possui quando na matemática superior consideramos sua extensão a sistemas mais gerais de números tais como o dos quaternianos ou números hipercomplexos, os quais possuem quatro componentes e cuja álgebra não satisfaz a propriedade coomutativa da multiplicação, contrário à álgebra dos reais e complexos.

Além das funções polinomiais, outros exemplos importantes da classe de funções elementares podem ser apresentados. Por exemplo, as funções racionais, quer dizer, as funções expressas como o quociente de dois polinômios tais como $r(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+x^2+2x+4}$, onde temos excluído os zeros do denominador para o domínio de tais funções. Dentre tais exemplos de funções racionais o mais simples deles está dado por $y=f(x)=1/x^2$. Tais funções devem ser apresentadas de início usando-se a variável x assumindo valores inteiros, montando-se uma tabela de valores e em seguida procedendo-se às interpolações lineares de tais valores, para que daí possamos inferir o seu esboço gráfico no caso da variável contínua x. Neste ponto deve-se considerar o comportamento da seqüência de números $x_n=1/n$, quando n é suficientemente grande e desse modo verificando-se que, neste caso, os elementos da seqüência $x_n$ ficam arbitrariamente pequenos, ou seja próximos de zero. A mesma análise deve ser repetida observando o que ocorre com a seqüência quando n fica suficientemente pequeno. Verifica-se que neste caso os elementos da seqüência ficam arbitrariamente grandes. Isto deve ser mostrado sempre com valores numéricos e sem nenhuma sofisticação conceitual. Na realidade é o conceito de limite que está por trás de tudo e é quase impossível tratar das funções mais importantes da matemática, mesmo elementar, sem que se faça menção a tal conceito quando consideramos o esboço dos seus gráficos. No exemplo que estamos tratando da função $f(x)=1/x^2$, a análise do seu comportamento via seqüências já é suficiente, neste nível, para o propósito de esboçarmos o seu gráfico. Uma outra categoria de funções elementares que não as polinomiais e racionais é obtida no problema de se determinar as inversas, quando existem, de funções racionais. Um exemplo típico deste contexto é o da função $f(x)=x^2$ ou mais geralmente $f(x)=x^n$ $(n\geq 1)$ consideradas no domínio $x \geq 0$. Neste domínio, a função $y=f(x)=x^2$ é crescente e desse modo possui uma inversa a qual é denotada por $x = \sqrt{y}$. De maneira similar a função $y=f(x)=x^n$ possui em tal domínio uma inversa dada por $x = \sqrt[n]{y}$. De um modo geral, podemos considerar funções do tipo $y = \sqrt[n]{R(x)}$, onde R(x) é uma função racional; e outras funções de tipo similar podem ser formadas lançando mão das operações racionais a esta classe. Por exemplo $y=\sqrt[n]{x^4+1} + \sqrt[m]{x^3}$, $y = \sqrt{x^2+1} + x^2$ são da classe que estamos considerando

Todas estas funções que temos considerado antes são casos especiais das funções denominadas algébricas; quer dizer, de funções y=f(x) as quais pódem ser definidas implicitamente por uma equação P(x, y)= 0, onde P é um polinômio nas variáveis x e y, ou mais brevemente, se y = f(x) satisfaz uma equação algébrica. Por exemplo a função $y=x^2$ é algébrica bastando considerar $P(x, y)=y-x^2$. As demais funções, ou seja, as que não satisfazem uma equação algébrica são chamadas de transcendentes. De um ponto de vista elementar as funções racionais e de modo mais geral as funções algébricas são definidas diretamente através das operações elementares do cálculo; no entanto, a geometria é a fonte da qual brotam os primeiros exemplos de funções "quod algebrae vires transcendit", ou seja, de funções que transcendem as operações elementares do cálculo. Desta classe de funções fazem parte as funções trigonométricas seno, co-seno, tangente etc. e as funções logaritmica e exponencial. Elas constituem o que se denomina de funções elementares transcendentes e são de grande utilidade em toda a matemática e em suas aplicações às ciências. Assim, os processos que ocorrem na natureza e com os quais as funções seno e co-seno se acham relacionados, são os processos ditos periódicos; quer dizer, aqueles processos descritos por funções f(t) e para os quais existe um período T que satisfaz a equação f(x+T)=f(x) válida para todos os valores de x. Exemplos típicos são os processos governados pelas funções seno e co-seno, pois eles são periódicos com período (mínimo) $2\pi$. Em termos concretos temos o movimento de um pêndulo, o movimento descrito por um sistema massa-mola ou oscilador harmônico etc. todos eles descritos pelas funções trigonométricas seno e/ou co-seno. Por outro lado, aqueles processos onde ocorre um decaímento ou um crescimento são descritos pela função exponencial em virtude da própria natureza desta função; pois em tais situações, deseja-se determinar a partir de um certo valor inicial a quantidade presente de determinada grandeza em um dado instante de tempo sabendo-se, por medidas experimentais, que no início do processo a quantidade preseente era $q_0=q(0)$. A lei que gorverna tal processo está dada pela função $q(t)=q_0e^{kt}$, onde k é uma constante não-nula, resultante de dados experimentais associados com a grandeza que estivermos considerando. Quando a constante k é negativa, os processos descritos por q(t) são denominados processos de decaímento e quando k ; 0 de processos de crescimento. A desintegração radioativa, a variação da pressão atmosférica quando a altura sobre a superfície da Terra aumenta, são exemplos de processos de decaímento; enquanto que, os juros de uma dívida bancária (juros compostos), a explosão populacional do planeta, são exemplos de processos de crescimento. Com relação à função logaritmica, que é a inversa da função exponencial, ela é de grande utilidade em cálculos envolvendo o produto de números muito grandes, como ocorre em situações vinculadas à astronomia. Neste sentido foram elaboradas as tábuas de logaritmos as quais facilitavam enormemente esses cálculos. Na atualidade, com o uso das calculadoras eletrônicas, essas tábuas de logaritmos perderam sua importância; no entanto, o estudo dos logaritmos é, e ainda permanecerá, de grande utilidade, uma vez que o desenvolvimento da Matemática e de outras ciências veio demonstrar que muitas leis matemáticas e vários fenômenos naturais, e mesmo sociais, estão intimamente com ele relacionados em situações de natureza não estritamente computacional.

Com relação ao processo de ensino-aprendizagem das funções elementares transcendentes somos de opinião que o mesmo deve ser implementado em duas etapas. Na primeira delas as funções sen x, cos x, a exponencial $e^x$ e o logaritmo de base e, log x etc., devem ser apresentadas partindo-se do modelo discreto para o contínuo. Vamos ilustrar nossos argumentos através das funções seno e exponencial. Com relação à função sen x, o ângulo x, medido em radianos com seu vértice como centro de um círculo de raio 1, tem por medida o comprimento de arco da circunferência que ele subtende. Desse modo, um ângulo de 90º é o mesmo que um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos, um ângulo de 45º tem medida de $\frac{\pi}{4}$ radianos etc.. A medida em radianos é a utilizada para ângulos nos desenvolvimentos analíticos de tais funções. Isto posto, as funções seno e co-seno são definidas: cos x é a medida da abscissa de um ponto A situado sobre a circunferência do círculo unitário, enquanto que sen x é a medida da ordenada de A. Com isto e estabelecidas as equações funcionais destas funções ou seja:

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x \text{ e}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \ .$$

podemos passar aos seus esboços gráficos. Vamos nos fixar na função seno, considerando-a tão somente no intervalo $[0,\pi]$. Construímos uma tabela de valores para sen x de início para os ângulos: $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ e em seguida por interpolação linear vamos obtendo os valores do sen x para arcos entre quaisquer dois valores encontrados antes. Em seguida, agora lançando da sua equação funcional, obtemos os valores do seno para arcos situados no 2º. quadrante e procedemos de modo idêntico ao que fizemos com os arcos do 1º. quadrante. Desse modo, ligando-se os pontos obtidos tem-se uma "aproximação poligonal" ao gráfico da função sen x. Uma questão importante, e que em geral é deixada de lado nos argumentos, é a de se saber por que o gráfico de sen x não formou reentrância quando a função passa pelo seu ponto de máximo o qual corresponde ao arco de $\pi/2$ radianos no intervalo em questão. Uma possível argumentação para isto, e talvez única, pode ser como se segue. Considere os seguintes pontos sobre o gráfico da função seno: $E = (\pi/2\text{-}h, \operatorname{sen}(\pi/2\text{-}h)) = (\pi/2\text{-}h, \cos h)$, $M = (\pi/2, \operatorname{sen} \pi/2) = (\pi/2, 1)$ e $D = (\pi/2+h, \operatorname{sen}(\pi/2+h)) = (\pi/2+h, \cos h)$. Daí segue-se que a declividade do segmento EM está dada por $\frac{1-\cos h}{h}$ enquanto que a do segmento DM por $\frac{\cos(h)-1}{h}$. Uma vez que $\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{(\cos(h)-1)(\cos(h)+1)}{h(1+\cos(h))} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(1+\cos(h))} = -\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \frac{1}{1+\cos(h)} \operatorname{sen}(h)$ e assim para h suficientemente pequeno (h próximo de zero) segue-se que $\frac{1-\cos h}{h}$ torna-se arbitrariamente próxima de zero; pois, sen h ~ h e cosh ~ 0 para tais valores de h. Desse modo, à medida que h tende a zero, as declividades dos segmentos considerados aproximam-se cada vez mais de zero e portanto o gráfico da função sen x no ponto de máximo

($\pi/2$, 1) não apresentará reentrância. Como se depreende dos argumentos, esta questão só pode ser tratada de maneira correta lançando-se mão do conceito de limite. Com relação à função exponencial $e^x$, adotamos o mesmo procedimento, considerando x um número natural n e montamos uma tabela de valores para $e^n$ com procedimento similar ao que fizemos com a função seno. Sabendo-se que e ; 1 e escrevendo-se e=1+h, h ; 0 tem-se pela fórmula do binômio que $e^n = (1+h)^n =$ ~1 ~+~ nh ~;~nh;; e desse modo quando o natural n for suficientemente grande, $e^n$ fica arbitrariamente grande. Mais uma vez o conceito de limite se acha aqui presente. Não há como escapar disto, quando estamos esboçando o gráfico de tais funções e mesmo das funções polinomiais tais como $f(x) = x^2$. De maneira similar quando n é um inteiro negativo $e^n$ "vai para" zero quando n fica grande e negativo. Dessa maneira com os pontos obtidos e pela análise feita, tem-se uma idéia do gráfico de $e^n$ para valores inteiros e racionais do expoente, estes últimos obtidos através do processo de interpolação linear aplicado aos dados resultados dos valores inteiros de n. No caso do expoente racional sabemos, por exemplo, que $e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}$, no entanto o que vem a ser $e^{\sqrt{2}} = e^{1,414}$, e mesmo qual é o seu valor? Bem, a idéia de como tudo isto funciona é a seguinte:

$$e^{\sqrt{2}} = e^{1+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}+\cdots} = e^1 . e^{\frac{4}{10}} . e^{\frac{1}{100}} . e^{\frac{4}{1000}} \cdots$$

Se pudermos determinar as potências sucessivas de e, obteremos o valor aproximado de $e^{\sqrt{2}}$. Evidentemente com uma pequena calculadora, a determinação de $e^{\sqrt{2}}$ é direta, no entanto é necessário compreendermos o que está se passando. Do exemplo dado temos que a seqüência de racionais $1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \ldots$ aproxima o irracional $\sqrt{2}$ ou tende para $\sqrt{2}$. Mais uma vez a idéia de limite se encontra na base de compreendermos o significado da potência irracional. No caso geral $e^x = \exp(x) = \exp(\lim\ r_n) = \lim\ \exp(r_n)$, onde $r_n$ é uma seqüência de racionais aproximando o irracional x. Não há como escapar disto, como já afirmamos antes, sob pena, como é o que acontece na prática, do estudo de tão importantes funções ficar numa sempre incompleta exposição!

Numa segunda etapa, e com as motivações advindas da primeira, introduz-se o conceito de limite primeiro para funções de variável discreta (as seqüências) e em seguida para as funções de variável continua, isto sendo feito com exemplos concretos tais como $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{x}$ para variável inteira e real, respectivamente. Uma vez introduzido e "compreendido" tal conceito, um dos mais importantes e também dos mais difíceis de toda a matemática, procede-se à análise do conceito de continuidade e de derivabilidade, sempre tratando conjuntamente os modelos discretos e os contínuos. Tudo isto sendo introduzido de maneira a "preencher as lacunas" deixadas na primeira etapa do estudo de tais funções. Com o instrumental adquirido dos processos infinitesimais o estudante estará apto a esboçar os gráficos de todas as funções de variável contínua que tenha até agora encontrado em seus cursos, bem como poderá agora aplicar tais conhecimentos no estudo dos conceitos de velocidade, aceleração, etc., ou seja na compreensão da descrição do movimento de uma partícula; conceitos estes que sem a noção de derivada são impossíveis de serem compreendidos. A esta altura o estudante já sabe que $(e^x)' = e^x$, $(sen x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -sen x$, e assim tem-se aqui a oportunidade dele ser apresentado ao conceito de equações diferenciais tão simples e importantes como $y'=y$ e $y''+y=0$ e com isto ao que vem a ser solução destas equações, as quais são dadas, neste caso, respectivamente pelas funções $e^x$, $sen x$, $\cos x$. Na realidade encontramos soluções dos problemas de valores iniciais:

$$(1)\ y'=y,\ y(0)=1 \text{ e}$$

$$(2)\ y''+y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \text{ ou } y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

Em seguida devem-se determinar as expressões de tais funções como "polinômios infinitos" ou séries de potências da forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Por exemplo as expressões seguintes são exemplos de tais representações:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots;$$

$$sen\, x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

etc.

Como dissemos antes, as funções polinomiais ou os polinômios se constituem nas funções mais básicas de toda a matemática, sendo as mesmas geradas por aplicação repetida das operações elementares de adição e multiplicação a uma variável x e a um conjunto de coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Pelo que acabamos de expor, as funções elementares transcendentes exponencial, seno e co-seno, etc. foram expressas através de um "polinômio infinito" e com isto tornando tais funções de uma importância ainda maior. Na realidade a sua vitalidade não para aí. Quando tais funções são enfocadas do ponto de vista mais avançado da matemática superior, na qual os métodos infinitesimais são o instrumental de trabalho, tais funções são obtidas invertendo-se o processo que temos considerado; quer dizer, aqui partimos das equações diferenciais $y'=y$ e $y''+y=0$ e admitimos que suas eventuais soluções podem ser expressas através de um polinômio infinito $y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ e obtemos desta forma as expressões anteriores da exponencial, do seno e co-seno, só que neste contexto, tais expressões são a própria definição destas funções. Este procedimento possui vasta aplicação quando do tratamento de situações mais gerais que são encontradas na matemática superior; mas a idéia permanece a mesma, que é o importante. Mais uma vez uma equação, no caso presente diferencial, passa a ser de grande relevância no estabelecimento da "fisionomia" da função em estudo.

Ainda dentro desta segunda etapa e tendo introduzido o conceito de derivada, o qual dá conteúdo ao conceito de tangente a uma curva em um dado ponto, o passo seguinte consiste em generalizar o conceito de área de uma figura, isto nos conduzindo ao importante conceito de integral. Mais uma vez a exposição deve enfatizar o modelo discreto e o contínuo. Após exemplos ilustrativos do conceito e algumas propriedades básicas, obtem-se o teorema fundamental do Cálculo relacionando assim os processos de derivação e integração; primeiro, com exemplos concretos e em seguida com simples argumentações de natureza geométrica obtém-se este importante resultado. Uma aplicação importante de tal resultado consiste em considerarmos a definição geométrica da função logarítmica: dado um número real positivo a o logaritmo de a é definido como a área sob o gráfico da funçã $\frac{1}{x}$ no intervalo [1,a]. Desta conceituação seguem-se todas as propriedades da função logarítmica em particular que ela é a inversa da função exponencial $e^x$ que temos considerado antes. De um modo geral definimos para a;0 e real $a^x$=exp(x log a), a qual é uma generalização de $e^x$ = exp(x log e)=$e^{x \log e}$. Uma consequência imediata desta conceituação do log x, além do esboço gráfico de tal função, é que a declividade do gráfico de log x está dada por $\frac{1}{x}$ em cada ponto; quer dizer, $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$, ou ainda, em virtude da definição da derivada $\frac{1}{x} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(\log(x+h) - \log x)$. Daí obtém-se a importante relação $\lim\limits_{n \to \infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$, a qual para x=1 nos dá: $e = \lim\limits_{n \to \infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Esta relação também nos permite considerar o seu prolongamento ou extensão para valores de x agora da forma ix; quer dizer, colocamos por definição $e^{ix} = \lim\limits_{n \to \infty}(1+\frac{ix}{n})^n$. Com argumentos simples aplicados à formula de De Moivre $(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\ \mathrm{sen}(n\alpha)$ e após algumas identificações, chegamos à importante fórmula de Euler para a exponencial imaginária: $e^{ix} = \cos x + i\ sen\ x$; a qual se constitui numa das mais importantes funções de toda a matemática. É possível apresentar um estudo de tal função lançando-se mão de métodos numéricos, de ínicio aplicado à função $10^{ix}$ e em seguida, por uma mudança de escala ou base, passamos à expressão de $e^{ix}$. Uma aplicação importante de tal função reside nos processos que governam os osciladores harmônicos forçados e forçados com amortecimento, os quais nos conduzem ao importante fenômeno de ressonância de grande utilidade na teoria dos circuitos elétricos da eletrotécnica. Ela possui também relevância nos processos que governam o comportamento da luz e da matéria, isto é nos processos quânticos.

As funções que temos considerado até o momento estão dadas na forma "explicita", onde simples expressões tais como $y=f(x)=ax+b$ ou $y=\text{sen } x$, etc. são considerados; nestes casos, dizemos que y está dado explicitamente em termos de x. Tais funções possuem representações geométricas dadas por uma curva no plano xy. No entanto, frequentemente em geometria analítica a equação de uma curva está dada não na forma explicita $y=f(x)$, mas na forma $F(x,y)=0$. Dizemos nestes casos que y está dado implicitamente em termos de x. Por exemplo, uma linha reta pode ser representada desta maneira pela equação $ax + by + c = 0$ e a circunferência de um círculo com centro na origem e raio um por $x^2+y^2-1=0$. Devemos aqui observar duas coisas. Em primeiro lugar, nem toda equação $F(x,y)=0$ é representação implícita de uma função $y=f(x)$ ou $x=g(y)$. Assim, a equação $x^2+y^2=0$ está satisfeita tão somente pelo simples par de valores $x=0$, $y=0$; enquanto que $x^2+y^2+1=0$ não possui valores reais de x e y que a satisfaça. Desse modo, uma questão muito importante que se coloca é de se investigar as circunstâncias sob as quais uma equação $F(x,y)=0$, que nos da y implicitamente em ternos de x. define uma função $y=f(x)$ e quais as propriedades possuídas por tal função. Nos métodos da matemática superior mostra-se que tal problema possui, sob certas condições impostas sobre $F(x,y)$ na vizinhança de uma solução inicial $F(x_0,y_0)$, solução, sem contudo nos indicar como encontrar uma tal solução inicial ou de como decidir se a equação $F(x,y)=0$ está satisfeita para todos os valores de x e y. Estas questões globais fogem ao escopo de uma primeira análise. A necessidade de nos restringirmos aos aspectos locais fica evidente se considerarmos a simples equação $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$. Para cada x com $-1<x<1$ a equação tem duas soluções diferentes $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ . O sinal pode ser fixado escolhendo para um dado $x_0$ em $(-1,1)$ um dos dois valores possíveis $y_0$ para o qual $x^2_0+y^2_0=1$. Uma solução única $y=f^*x)$ com $y_0= f(x_0)$ é obtida então para todo x em $(-1,1)$ requerendo que y satisfaça $x^2+y^2=1$ e tenha o mesmo sinal que $y_0$. Geometricamente, o gráfico de f é ou o semicirculo inferior ou o semicirculo superior, um qualquer que contenha o ponto $(x_o,y_o)$. Tais curvas, como a do presente exemplo, não determinam de maneira não-ambígua as funções correspondentes. Algumas vezes diz-se que a curva é representada por uma função plurívoca ou multivalente; as funções separadas representando-as são então chamadas os ramos unívocos da função plurívoca associada à curva. Desse modo ficou convencionado que a apalavra função significa função unívoca, conforme o uso que até agora estavamos adotando. Assim é que por exemplo, o símbolo $\sqrt{x}$ $(x \leq 0)$ sempre denotará o número não-negativo cujo quadrado é x. Vale lembrar que foi o conceito de função implícita que nos permitiu dar linhas atrás a definição geral de uma função algébrica, como sendo uma função $y=y(x)$ definida implicitamente por uma equação $F(x,y)=0$, onde F é um polinômio nas variáveis x e y. Uma função que não satisfaz nenhuma equação algébrica diz-se então transcendente.

Temos visto anteriormente que um aspecto importante do conceito de função é que ele se constitui na contraparte matemática quando da descrição dos processos que ocorrem na natureza. Isto suscedeu, como vimos, quando tratamos com os processos de crescimento e com os processos de decaimento, os quais foram descritos através da função exponencial. Um outro exemplo nos é fornecido pela descrição matemática dos processos periódicos, a qual é feita lançando mão das funções trigonométricas seno e co-seno. Em todos os casos que temos analisado de função uma única variável independente se acha presente; no entanto, para descrevermos outros processos físicos como o da distribuição de temperatura numa dada sala, necessitamos considerar funções de mais de uma variável independente; no caso presente três variáveis independentes para caracterizar ou individualizar cada ponto da sala e eventualmente o tempo t. Desta forma temos uma função $T=T(x,y,z,t)$ de quatro variaveis ou então $T(x,y,z)$ quando a distribuição de temperatura for estacionária; quer dizer, quando T não for uma função explicita do tempo t. Um processo físico mais complexo que o citado, consiste na descrição do escoamento de um dado fluído (líquido ou gás). Um fluído é constituido de uma infinidade de partículas, representando o protótipo dos modelos de um continuum. A descrição do escoamento, ou também como dizemos a determinação do movimento do fluído, pode ser feita, por exemplo, conhecendo-se três funções $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ as quais representam as componentes da velocidade do movimento no ponto $(x,y,z)$ no tempo t. Esta descrição do escoamento de um fluído é devido a Euler. Como um outro exemplo para encerrar estas considerações, podemos considerar a descrição do estado eletromagnético no vácuo. Aqui necessitamos de três funções descrevendo o "estado elétrico" $E_1(x,y,z,t)$, $E_2(x,y,z,t)$, $E_3(x,y,z,t)$ e mais três que descrevem o "estado magnético" $H_1(x,y,z,t)$, $H_2(x,y,z,t)$, $H_3(x,y,z,t)$. Desse modo o estado eletromagnético no vácuo está determinado por seis funções da posição e do tempo.

Todos estes exemplos que temos considerado de funções de várias variáveis são o que na ciência aplicada são denominados de campos. Desse modo temos o campo de uma dada distribuição de temperatura, o campo de velocidades do escoamento de um fluido, o campo eletromagnético, etc.. Assim campo e função são conceitos intercambiáveis. Neste contexto, a determinação de tais funções em cada caso é feita tão somente através das equações de campo, que são equações (diferenciais parciais), cujas soluções, os campos ou funções, são em muitos casos difíceis de serem determinados. Aqui, as equações é que ditam as regras, podemos assim dizer; sem elas nada podemos fazer. As funções brotam como soluções dessas equações, de maneira similar ao que ocorreu com as funções exponencial, seno e co-seno conforme argumentamos anteriormente. Quando a matemática é pensada em termos de uma linguagem universal, a qual tem mostrado ser a mais apropriada para que o homem possa se aproximar, um pouco mais, de uma compreensão racional da realidade ou mundo que o cerca, as equações (diferenciais) desempenham dentro desta visão, o instrumento de perquirição do conhecimento desta realidade; uma vez que as leis por elas expressas, nos descrevem os processos que ocorrem na natureza em termos de diferenças pequenas ou infinitesimais de tempo e/ou espaço. Desse modo, os fenômenos que ocorrem na natureza são descritos por leis as quais ao serem formuladas em termos de equações diferenciais, expressam basicamente o comportamento local das grandezas envolvidas (temperatura, velocidade, estado do campo eletromagnético, etc.), estabelecendo assim uma relação não entre todas as fases de um processo, mas tão somente entre uma fase e a seguinte. Esta propriedade de uma equação diferencial torna-a expressão natural do princípio de causalidade que pode assim ser enunciado: "a ocorrência de um certo fenômeno B de uma dada classe depende da ocorrência de um outro fenômeno A de outra classe e nesta situação A é chamado a causa e B o efeito". Este é um princípio de validade universal e o mesmo nunca foi contraditado ou contestado em qualquer observação ou experiência e poderíamos também expressá-lo afirmando que: "todas as coisas provem de outras coisas e dão origem a outras coisas". Desse modo, tudo no universo se encontra interligado por uma cadeia de causa e efeito.

## III - ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS E COMENTÁRIOS SOBRE O QUESTIONÁRIO

Faremos de início algumas considerações sobre uma divisão da matemática, aventada por Félix Klein, em "matemática de aproximação" e "matemática de precisão", de como a visão que apresentamos nas duas partes anteriores aqui se reflete e de que maneira este corte, podemos assim dizer, pode contribuir para uma mudança de consciência no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem, como um todo, da matemática nos diversos níveis de ensino. Por fim, tratamos de apresentar alguns comentários sobre o questionário que nos foi entregue e no qual são colocadas várias questões sobre o processo de ensino-aprendizagem do conceito de função na matemática elementar, bem como outras de natureza mais geral.

Vamos considerar alguns exemplos para que possamos estabelecer concretamente a diferença entre as divisões apresentadas. Quando na parte um tratamos da representação dos diversos sistemas de números numa reta, consideramos o conceito de número irracional. Tal conceito pertence exclusivamente à matemática de precisão, uma vez que, por exemplo, ao afirmarmos que dois pontos da reta estão separados por um número (irracional) de $\pi$ milímetros, não pode, possivelmente, ter um significado, pois, quando os instrumentos de medida ou escalas são construídos em metros há um limite na precisão com que as suas subdivisões são feitas. Assim é que se considerarmos que as divisões na nossa escola tenham uma precisão até a quinta casa decimal, e isto pode ser melhorado com o refinamento da técnica, e tivermos a expansão de até a sexta casa decimal, resulta sem significado a afirmação considerada antes. Isto nos indica que na prática podemos substituir, sem reservas, os números irracionais pelos racionais e desse modo utilizar os irracionais no sentido da matemática de aproximação; quer dizer, considerarmos dos números irracionais somente as partes finitas de suas expansões decimais. Mesmo assim, como vimos, existirá sempre um erro essencial quando dessa representação aproximada, em virtude das limitações técnicas. Uma vez que tais limitações vão sempre estar presentes, poder-se-ia argumentar, um tanto grosseiramente, que a matemática de aproximação é a única necessária nas aplicações e que a matemática de precisão existe somente para o deleite intelectual daqueles aficionados por ela e para dar o indispensável suporte para o desenvolvimento da matemática de aproximação. Pessoas existem que pensam assim e devemos respeitá-las. Todavia, o próprio conceito de número irracional o qual nos conduziu àquele de um continuum, já seria o suficiente para que tais indivíduos revisassem suas posições. Um outro exemplo deste contexto ocorre quando tratamos de encontrar soluções reais da equação $x^2+1=0$. Aqui a matemática de aproximação falha totalmente, uma vez que no domínio dos números reais tal equação não possui solução. Desse modo necessitamos ampliar tal sistema de números para que a equação tenha solução; uma tarefa que concerne à matemática de precisão. Ainda com respeito à solubilidade de equações, vimos anteriormente que o problema da solução de equações algébricas de grau n por meio de radicais, estudado por Ruffini, Abel e Galois, conduziu-os à criação da teoria dos grupos e ao consequente desenvolvimento da álgebra moderna. Um outro exemplo pode ser considerado, quando determinados problemas da ciência e da técnica exigem para sua solução uma ampliação do sistema de números complexos como é o caso da introdução dos números hipercomplexos tão necessários nas questões de toda a ciência contemporânea e das matemáticas aplicadas às engenharias. Enfim uma gama muito grande de situações poderiam ser colocadas e nas quais a matemática de precisão ocupa uma posição de primeira linha. No entanto, o desenvolvimento histórico de toda a matemática nos tem mostrado que o que existe é uma interação contínua entre cada uma dessas divisões e na qual aqueles aspectos não esclarecidos por uma delas são realizados pela outra. Desse modo acreditamos que não devemos formar fileira em torno desta ou daquela divisão, mas sim tratá-las como aspectos complementares uma da outra, de maneira similar quando tratamos do discreto diante do contínuo. Esta também deveria ser a postura a ser seguida dentro do processo de ensino-aprendizagem da matemática. Temos enfatizado esta abordagem em diversos exemplos que tratamos nas partes anteriores destas considerações e sobretudo devemos chamar atenção para o fato de que uma teoria exata (matemática de precisão) dos números irracionais dificilmente poderia ser adaptada ou ao interesse ou ao poder de compreensão de muitos, senão a maioria, dos estudantes de matemática elementar. Neste nível os estudantes usualmente contentam-se com resultados de exatidão limitada (matemática aproximativa) e deve-se apresentar os números irracionais por meio de exemplos de frações decimais aperiódicas, que é como usualmente é feito. Somente quando em seus estudos superiores, é que uma apresentação rigorosa de tais números deve ser feita, isto dependendo do curso que ele irá frequentar. Mas uma coisa é certa, seja qual for o curso que o estudante venha cursar, e se um estudante criterioso, esta é uma questão que ele terá como uma eterna companheira. Isto posto, passemos aos nossos comentários sobre o questionário. Para evitar colocações repetitivas da nossa parte, resolvemos aglutinar algumas perguntas do questionário original, reduzindo-o de doze (12) para tão somente cinco (05) questões.

(1) Qual a importância do estudo de funções no campo da Matemática e no das suas aplicações?

Vimos na parte 1 como através dos processos de contagem e de medida e do importante conceito de correspondência biunívoca, fomos paulatinamente conduzidos aos diversos sistemas numéricos tendo culminado na representação dos números reais na imagem idealizada dos pontos de uma reta. Neste contexto o próprio conceito de correspondência biunívoca contém potencialmente e ainda não tornada manifesta, a essência do que vem a ser uma função e mais ainda uma sua primeira classificação em injetiva e sobrejetiva. Como também salientamos nesta parte, isolar o conceito de função como ele hoje se nos apresenta foi uma tarefa difícil e que demandou muito tempo e trabalho por parte de muitos matemáticos ilustres. Vale lembrar que o libertar do conceito de função que imperava na época, aquele de "libero manus ductu", conduziu a desenvolvimentos importantes em toda a matemática tais como o das séries trigonométricas, conhecidas na atualidade por Séries de Fourier, bem como do surgimento e desenvolvimento do que em geral é conhecido como a teoria dos Conjuntos de Cantor. Além desses aspectos que fazem parte do desenvolvimento histórico da matemática, o conceito de função se acha imerso em todos os campos da Matemática atual e no das suas aplicações às ciências da natureza, às ciências humanas e às ciências sociais; e desse modo o seu estudo está mais do que justificado. O próprio modelo de um continuum, o qual emergiu como uma representação idelizada dos números reais numa reta, está estreitamente vinculado como vimos a um tipo especial de função, aquele de correspondência biunívoca. Cabe destacar que o conceito de continuum tem desempenhado nos fundamentos conceituais da Matemática um importante papel e mesmo toda a nossa ciência e tecnologia sobre ele se assenta. Quando a matemática é aplicada às outras ciências, procura-se sempre determinar de que maneira uma dada grandeza, objeto de estudo, se relaciona com certas variáveis pertinentes. Via de regra, as informações de que dispomos sobre tal grandeza são expressas através de certas equações diferenciais, cujas soluções são dadas por funções que nos fornecem informações sobre a grandeza sob investigação. Outras vezes as informações de que dispomos são expressas através de equações de diferenças finitas e aqui mais uma vez as respostas nos são propiciadas por certas funções. Mesmo quando não nos é possível obter com precisão os dados com os quais estamos lidando numa dada situação, ou seja quando estamos na presença da aleatoriedade, as respostas desejadas são expressas por variáveis aleatorias que nada mais são do que funções cujos domínios são dados espaço de eventos e por conseguinte cujos valores são assumidos com certas probabilidades. Podemos continuar apresentando mais e mais situações tanto da Matemática quanto de suas aplicações aos variados setores do conhecimento e com segurança afirmar que os conceitos de número e de função, são os dois mais importantes e mais profícuos de toda a ciência seja ela pura ou aplicada.

(2) Qual a importância do estudo de função na matemática de primeiro e na de segundo graus? Como tal conceito deve ser trabalhado em ambos os níveis de modo que o estudante reconheça as suas conexões com tópicos específicos da matemática e com outras disciplinas do seu curso?

Tendo em mente as considerações feitas na questão anterior as quais põem em destaque o caráter universal de utilização de tal conceito em todos os campos da matemática e das suas aplicações às ciências e uma vez que a matemática elementar é o nível preparatório a patamares mais elevados da pirâmide do conhecimento, é evidente que o estudo de função não poderá deixar de ter sua importância realçada neste nível de ensino. Agora, uma questão importante é o que se coloca na segunda parte da questão acima: como se deve trabalhar neste nível tal conceito e qual a sua imediata utilidade? No que diz respeito ao primeiro grau, o conceito de função pode ser introduzido e trabalhado via os processos de contagem e de medida, através de exemplos concretos e quando possível tirados do cotidiano do estudante, conforme já expressamos na parte

2, não sendo aqui necessário repetí-los. Os exemplos tratados devem procurar enfatizar tanto o aspecto aproximativo quanto o preciso, e isto ficou patente naqueles por nós considerados, bem como a conexão feita com tópicos da matemática tais como as progressões aritméticas e geométricas. Nesse nível outros exemplos de funções que são consideradas são as lineares, afim e as funções quadráticas. Sugerimos, no que diz respeito às funções quádráticas, conforme já enfatizamos anteriormente, que no seu estudo a questão relativa aos seus zeros complexos, se não feito em profundidade, mas que pelo menos as raízes complexas sejam introduzidas e trabalhadas. Agora, com relação ao segundo grau, em continuidade ao estudo anterior e seguindo os mesmos procedimentos metodológicas, deve-se introduzir de início as funções polinomiais chamando a atenção para o teorema fundamental da álgebra, conforme salientamos na parte 2. Em seguida devem ser estudadas as funções: exponencial, logarítmica, seno e co-seno. Estas são as mais importantes funções da matemática elementar, uma vez que por um lado são os primeiros exemplos de funções transcendentes e por outro elas constituem os fundamentos de importantes processos que ocorrem na natureza. Assim é que a função exponencial se encontra na base dos processos da natureza para os quais um decaimento ou crescimento de uma dada grandeza se verifica com o passar do tempo. Este é o caso da desintegração radioativa muito utilizada na datação arqueológica por radiocarbono. Um outro aspecto da função exponcial que deve ser explorado é o relacionado com o cálculo de juros continuamente compostos. Enfim existem outras situações nas quais a função exponencial desempenha um importante papel na sua modelagem, como é o caso da variação da pressão atmosférica com a altitude, no processo de aquecimento ou esfriamento de um corpo na atmosfera, etc.. Todos esses exemplos para serem devidamente formulados devem lançar mão dos métodos infinitesimais. Sem esses recursos tão somente as fórmulas poderão ser apresentadas e mesmo que só se faça isto, deve-se chamar a atenção para este importante aspecto da função exponencial. No que diz respeito às funções trigonométricas seno e co-seno elas se acham na base dos processos da natureza e para os quais uma dada grandeza varia de modo que seus valores são repetidos de modo periódico. Uma situação concreta nos é apresentada pela descrição matemática do movimento de um pêndulo, bem como o movimento descrito por uma pequena massa presa a uma mola, etc.. Para que se possa apreciar devidamente tais funções devemos considerar também aqui os métodos infinitesimais, sem os quais, como frisamos na parte 2, muitas propriedades importantes deixam de ter uma resposta satisfatória, como é o caso do traçado dos seus gráficos. Conforme já salientamos antes, apesar dessas funções diferirem consideravelmente das funções polinomiais, no entanto os métodos infinitesimais, quando propriamente utilizados nos permitem expressar todas estas funções em termos de polinômios infinitos denominados séries de potências. Somos de opinião que numa segunda etapa de apresentação de tais funções, no último ano do segundo grau, uma tal visão deva ser explorada. Retornaremos a este ponto na última questão desta parte. Para encerrar gostaríamos de acrescentar que sem uma tomada de consciência por parte do professor procurando contactar obras onde tais assuntos são apresentados com mão de mestre, dificilmente os seus horizontes se alargarão, comprometendo se isto não for feito a formação dos seus estudantes, uma vez que sem esta postura dificilmente uma visão profunda, penetrante e duradoura poderá resultar.

(3) Mesmo sendo função uma representação mais genérica do que equação, no entanto por que na matemática elementar inicia-se o estudo pelas equações e não pelas funções? De que maneira tal quadro pode ser revertido e como devemos proceder na apresentação dos conceitos neste caso?

Antes de qualquer outra coisa, perguntamos: será que é correto afirmar que função é uma representação mais geral que equação? A resposta tanto pode ser afirmativa como negativa. Ela é positiva quando dispomos a priori do conceito de função f(x) e desse modo uma equação será simplesmente os zeros de tal função, ou seja, aqueles x do seu domínio para os quais f(x)=0; todavia, mesmo aqui pode nem sequer existir x para o qual f(x)=0, como é o caso da função exponencial. Por outro lado, o conceito de uma equação pode mesmo nem sequer possuir qualquer vínculo com o de função. Por exemplo, como já observamos na parte 2, a equação $x^2+y^2=0$ é satisfeita unicamente pelo simples par de valores x=0 e y=0; enquanto a equação $x^2+y^2+1=0$ não é satisfeita por nenhum par de valores x e y reais. No entanto a equação $x^2+y^2-1=0$, para cada $-1<x<1$, possui duas soluções distintas $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Tão somente quando prescrevemos um dos sinais em cada $-1 < x < 1$ é que obtemos uma função, no sentido que emprestamos ao seu significado de "função unívoca". Outros exemplos podem ser exibidos de situações similares, como é o caso da equação $x+y+z+xyz^3=0$ e para a qual é possível mostrar que ela define z implicitamente como uma função de x e y numa vizinhança de x=y=z=0. Estes exemplos nos mostram que nem sempre de uma dada equação, digamos F(x,y)=0, podemos concluir que ela tem uma solução y=f(x). Eles só podem ser analisados lançando mão de técnicas avançadas da matemática superior, no estudo que se faz das funções definidas implicittamente.

Do exposto depreende-se que não há porque priorizar o conceito de função ao de equação. Eles são conceitos que podem, e devem, ser introduzidos de maneira independente e quando for o caso que se faça a devida vinculação. Vale lembrar, como salientamos na parte 2, que foi uma questão relacionada com a solubilidade de equações algébricas de grau n por radicais, que conduziu Ruffini, Abel e Galois à criação da teoria dos grupos tão importante para os desenvolvimentos subsequentes que se observaram na álgebra.

(4) Por que, em geral, os estudantes do segundo grau não fazem a interpretação dos gráficos apresentados nas disciplinas de química, biologia e física da maneira como tal conteúdo é trabalhado na matemática? Como tal situação pode ser contornada?

De início vamos esclarecer um ponto que algumas vezes não se leva em conta. Estamos nos referindo à postura dos docentes de matemática e das disciplinas de química, biologia e física frente ao próprio conceito de função, já que os gráficos nada mais são que uma sua representação. Pois bem, o professor de Matemática e os professores dessas disciplinas diferem algumas vezes com respeito à ênfase que colocam sobre o próprio conceito de função. O professor de matemática enfatiza a lei de correspondência, quer dizer, a operação matemática qúe é aplicada à variável independente x para obter o valor da variável dependente y. Neste sentido f( ) é um símbolo para uma operação matemática; o valor $y=f(x)$ é o resultado de aplicar a operação f( ) ao número x. Por outro lado, os professores das outras disciplinas citadas estão, algumas vezes, mais interessados na própria grandeza y do que em qualquer procedimento matemático através do qual os valores de y possam ser calculados através de x. Assim, por exemplo, pode ser determinado por experimento que a resistência r ao deslocamento de um dado objeto em certo meio depende da sua velocidade v, quando ou não uma fórmula matemática explicita para calcular $r=f(v)$ seja conhecida, a não ser que uma tal fórmula possa ajudar na análise do comportamento da grandeza r. Esta, via de regra, é a atitude ordinariamente tomada quando a matemática é aplicada a estas disciplinas e acreditamos que ela possui uma forte componente psicológica que é passada de modo sutil, algumas vezes não proposital, aos estudantes do segundo grau ou não. Um outro aspecto que gostaríamos de colocar é que a obtenção efetiva de uma fórmula expressando a dependência funcional entre duas variáveis, quase sempre é uma tarefa muito difícil. Na maioria dos casos somente lançando mão de técnicas avançadas, tal como as proporcionadas pelos métodos infinitesimais, é que se pode efetivamente obter uma fórmula explicitando uma variável em termos de outras. Mas, mesmo assim uma análise completa do gráfico de uma dada função requer tais métodos para a sua efetiva compreensão. Como vemos há limitações tanto psicológicas quanto técnicas. Mas se deixarmos de lado estas questões, o que pode efetivamente ser feito para que o estudante possa ter um procedimento similar na interpretação dos gráficos de suas funções nas diversas disciplinas do seu curso? Acreditamos que isto depende tão somente dos seus professores. Eles devem utilizar concomitantemente os dois tipos de matemática referenciadas na introdução desta parte: Matemática de aproximação e Matemática de precisão. Os professores de Matemática utilizarem um pouco da matemática aproximada e os demais professores procurarem se "aproximar" mais da matemática de precisão. Em outras palavras, o professor de Matemática deve considerar exemplos de funções tirados dos textos de outras disciplinas e proceder à sua interpretação gráfica e vice-versa, os professores de química, biologia e fisica devem dar um tratamento similar ao que é apresentado, quando possível, por seus colegas da matemática. Isto além de gerar uma verdadeira interdisciplinariedade , tão em voga, virá esclarecer e resolver um dilema do estudante: será que as funções de que trata a matemática não têm nada a ver com as que estudamos em química, biologia e física e reciprocamente?

(5) Expresse sua opinião sobre os conteúdos de matemática atualmente distribuídos nos cursos de primeiro e segundo graus, no que diz respeito a: quantidade, adequabilidade e atualidade.

Convém que façamos inicialmente algumas considerações de natureza geral sobre uma outra questão que julgamos ser de relevância para o tema abordado dos conteúdos matemáticos dos cursos de primeiro e segundo graus e que consiste no processo de interação entre os níveis de ensino superior e médio, no que tange especificamente à Matemática. Assim procedemos uma vez que, como é bastante claro, os conteúdos matemáticos alocados na matemática de nível médio visam, entre outras coisas, preparar o estudante para seus contatos posteriores com técnicas matemáticas avançadas. Além do mais, em nossos contatos com professores e estudantes, sempre escutamos que existem dificuldades, de ambas as partes, tanto psicológicas quanto técnicas, em ultrapassar as fronteiras de um nível para o seguinte, superando assim as descontinuidades que foram geradas. Neste contexto é que devemos nos concentrar colocando algumas idéias com respeito aos conteúdos de matemática do primeiro e segundo graus, não somente no que tange a quantidade, adequabilidade e atualidade, mas principalmente no quesito qualidade, de maneira, quem sabe, possam contribuir para suavizar aquelas descontinuidades.

O processo de interação entre os níveis médio e superior pode se dar de diversas maneiras, entre as quais citamos: realização de seminários nas escolas, sobre temas específicos, cursos de aperfeiçoamento e de especialização para professores do ensino médio, etc.. Em tal processo de interação visa-se, além da aproximação citada, a melhoria do ensino da Matemática em termos de conteúdo e também no sentido de mostrar as conexões da Matemática com outros campos do conhecimento. Quando afirmamos que devemos nos preocupar com o conteúdo de matemática que é ensinado, isto não significa necessariamente que devemos ensinar bastante, mas que enxerguemos o quanto é bastante para ser ensinado. Não é difícil comprovarmos que nos dias de hoje, tanto a maioria dos textos quanto o ensino da Matemática, têm degenerado, com frequência, em um inócuo entretenimento de resolução de problemas, os quais se bem que possam desenvolver uma habilidade formal, não conduz por outro lado a uma compreensão efetiva, nem tampouco a uma maior independência intelectual. A maioria dos textos da atualidade sobre a Matemática Elementar não fornece a professores e estudantes do nível médio aspectos realmente substanciais dos tópicos abordados, fixando-se quase que exclusivamente em lugares comuns e desse modo não oferecendo nenhum roteiro seguro que conduza diretamente ao que é de interesse a partir dos fatos fundamentais e daí para pontos avançados donde se possa divisar a substância e a grande força da Ciência Matemática. No que diz respeito às conexões da Matemática com os outros campos do conhecimento, devemos observar que em decorrência de que, na atualidade, a pesquisa matemática tem se caracterizado por uma excessiva insistência numa matemática de precisão, com uma ênfase predominantemente abstrata e como decorrência disto tendendo mais e mais para uma superespecialização, perde-se com isto não somente as conexões com outros campos do conhecimento como também das aplicações da Matemática; quer dizer, esta postura de se fazer matemática, tende, com o passar do tempo, a aumentar cada vez mais o fosso de separaçào entre a matemática e os utilizadorees da matemática que primam, com excesso também desse lado, em praticar tão somente uma matemática aproximativa; quando, como já salientamos antes, o que deveria ocorrer era um equilíbrio entre elas, uma iluminando facetas obscuras da outra. No entanto tal estado de coisas não deve justificar um posicionamento de retraimento e muito pelo contrário uma reação oposta tanto pode quanto deve partir daqueles que se sentem conscientes do valor intelectual da Matemática e que se objetive por uma compreensão profunda da Matemática como um todo orgânico e que a mesma seja o fundamento para todo pensamento e ação científica.

Todo este quadro tem implicações profundas em todo o processo de ensino-aprendizagem não só da matemática elementar, uma vez que a maioria dos textos utilizados neste processo peca seja pela falta de profundidade nos temas abordados, ou quando este não é o caso, tratam os contéudos de modo totalmente desvinculados das aplicações. Como então reverter este quadro? Para isto, seria necessário que fossem introduzidos textos, e mesmo traduzidos de outros idiomas, os quais fornecessem a professores e estudantes aspectos realmente substanciais dos conteúdos tratados, evitando por conseguinte os lugares comuns tão falcilmente encontrados na grande maioria dos livros-textos da atualidade. Vai aqui um nosso testemunho. Quando estudante de primeiro e segundo graus tivemos a felicidade de, na época, dispormos de textos excelentes na área de Matemática. Recordamos, com um pouco de saudade daqueles tempos, as obras do Ary Quintela em sete (7) volumes e cobrindo toda a matemática de primeiro e segundo graus; a obra do Thales Mello de Carvalho para o segundo grau de hoje e a obra de Manoel Jairo Bezerra com as mesmas características da anterior. Acreditamos que tais obras, com as devidas atualizações ao momento de hoje, seriam ainda de grande utilidade para os professores e estudantes. Infelizmente estas obras não se encontram mais a nossa disposição, a não ser nas livrarias tipo Sebo e olhe lá! Estes livros preenchem, ainda hoje, dois dos quesitos mencionados: quantidade (com qualidade) e adequabilidade. Além das obras citadas, cabe destacar, pela sua clareza e profundidade de concepção, os livros do matemático (paranaense) Algacyr Munhoz Mäeder, cobrindo nos seus sete (7) volumes toda a matemática de primeiro e segundo graus. Todas estas obras que acabamos de citar, vale destacar, não faziam aplicações específicas seja na química ou na física, no entanto, existiam obras de nível equivalente nestas áreas onde isto era plenamente satisfeito. Todavia o conteúdo matemático de cada uma delas era o que desejavamos que a maioria dos textos da atualidade contivesse, e que, lamentavelmente, dá-se exatamente o oposto!

Tendo em mente o exposto, vamos em seguida apresentar algumas idéias sobre tópicos da matemática elementar os quais julgamos essenciais para o desenvolvimento matemático tanto dos professores como dos estudantes desse nível de ensino. Os conte;udos que apresentaremos, como sugestão, visarão muito mais a formação do próprio professor, mas evidentemente tudo isto pode ser perfeitamente adequado ao seu processo de transmissão desses conteúdos; ou seja, na própria montagem dos programas de matemática se refletiriam a visão por ele adquirida no seu processo de aquisição de conhecimentos. Não adianta reformar os programas dos cursos se não fizermos o que é mais essencial e primário o burilamento cultural do próprio professor. As pessoas só transmitem o que elas sabem e isto só pode ocorrer na medida que elas tenham tido oportunidade de obter um profundo conhecer dos temas com os quais venham se encontrar envolvidas. Os conteúdos que apresentaremos, por si só, já indicarão a qual dos níveis de ensino os mesmos se aplicam, no entanto, para facilitar, convencionaremos que os índices I e II indicarão, respectivamente, os níveis de primeiro e segundo graus. Vamos designar nossa proposta de "Métodos da Matemática Elementar de Um Ponto de Vista Superior", a qual se acha estruturada da seguinte maneira: A- Métodos Aritméticos - Estatísticos; B- Métodos Algébricos - Analíticos; C- Métodos Geométricos - Computacionais.

No desenvolvimento de cada um desses "métodos" deve-se explorar a abordagem histórica da disciplina em concomitância ao desenrolar de seu conteúdo. A exposição histórica, quando fiel e cheia de esclarecimento, mostra-nos a situação da disciplina com o fluir do tempo e acreditamos que isto seja importante e motivador tanto para o docente quanto para o aluno. Feitos estes preliminares, vamos em seguida apresentar os tópicos que, em nossa opinião, devem ser desenvolvidos em cada um dos métodos considerados.

A- Métodos Aritméticos-Estatísticos

I- O Processo de Contagem e a base lógica dos números naturais. Dados estatísticos e contagem . Lidando com os números. Gráficos de composição, de barras e lineares. Histogramas e poligonal de freqüências. Métodos estatísticos de contagem. O Processo de medida e a base lógica dos números racionais. Medindo a incerteza e o conceito de probabilidade. Números racionais e frações decimais. Cálculo com números aproximados. Conceitos da teoria dos erros. Os processos de contagem e de medida e o conceito de função. Caos na calculadora.

II- Segmentos incomensuráveis e os números irracionais. Frações decimais infinitas e números irracionais. Os númeeros reais e o conceito de limite. Correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta. Experimentos aleatórios e probabilidades matemáticas. Combinatória e probabilidades. Regras elementares do Cálculo de Probabilidades e Aplicações. Noções sobre Variáveis aleatórias e suas distruições na reta. Alguns tipos especiais de distribuição: binomial, Poisson, Gauss, etc..

Sugestão Bibliográfica para A.

1) K. Lovell, O Desenvolvimento dos Conceitos Matemáticos e Científicos na Criança, Editora Artes Médicas Sul Ltda, Porto Alegre (1988);

2) G. Ifrah, Os Números: a história de uma grande invenção. Editora Globo, Rio de Janeiro (1989);

3) A. Xavier, Noções de Estatística no Ensino de Matemática do 1°. Grau, Mec-Fename, Rio de Janeiro (1981);

4) D. Blackwell, Estatística Básica, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo (1973);

5) W. Wallis, H. Roberts, Curso de Estatística, Vol. 1, 2, Editora Fundo de Cultura, (1964);

6) R. Courant, H. Robbins, Que és la Matemática?, Editora Aguillar, Madri (1967);

7) W. Feller, elementos da Teoria de Probabilidades, Vol. 1, Editora Edgard Blücher, São Paulo (1979);

8) H. Cramer, Elementos da Teoria de Probabilidades e Algumas de suas Aplicações, Editora Mestre Jou, São Paulo (1973);

9) G. Polya, A arte de Resolver Problemas, Editora Interciência, Rio de Janeiro (1978);

10) T. Dantzig, Número: A Linguagem da Ciência, Zahar Editores, Rio de Janeiro (1970);

11) F. Klein, Elementary Mathematics from Advanced Standpoint, Editora Dover, Nova York (1940);

12) M. Baron, A Matemática Grega - Unidade 1 do Curso de História da Matemática da Open Univeristy, Editora da Universidade de Brasília, Brasília (1985);

13) I. Stewart, Será que Deus Joga Dados? Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro (1991).

B- Métodos Algébricos-Analíticos

I- O plano cartesiano. Equações de retas e curvas. Relações e o conceito geral de função. Funções lineares e relações lineares. Funções-Potências. Polinômios e equações polinomiais. Diferenças finitas e aplicações. números complexos e equações quadráticas. Mapeamento logístico. Cascata duplicadora de período.

II- Interpretação geométrica dos números complexos. Fórmula de De Moivre e Raízes da Unidade. O Teorema Fundamental da Álgebra. Números Algébricos e Transcendentes. Ângulos e Coordenaadas Polares. Funções algébricas e transcendentes. As Funçòes seno e co-seno e os processos periódicos. Gráficos polares. Seqüências. A Função Exponencial e os processos de decaimento e crescimento. As Funções logarítmicas. A Fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Escalas e Métodos Gráficos. Idéias de base do Cálculo Infintesimal. As Funções exponencial e logarítmica via os métodos do cálculo. Aproximações e desenvolvimentos de Taylor. As funções hiperbólicas. Cálculo de áreas e volumes pelos métodos infinitesimais.

Sugestão Bibliográfica para B:

14) As referências 6), 11) e 13) da parte A.

15) E. Batschelet, Introdução à Matemática para Biocientistas, Editora Interciêencia e Editora da Universidade de São Paulo, Rio de Janeiro (1978);

16) M.Baron, Indivisíveis e Infinitesimais - unidade 2 do Curso de História da Matemática da Open University, Editora da Universidade de Brasília, Brasília (1985);

17) U. D'Ambrósio, Cálculo e Introdução à Análise, Companhia Editora Nacional, São Paulo (1975);

18) K. Whipkey, M. Whipkey, Cálculo e suas Múltiplas Aplicações, Editora Campus, Rio de Janeiro (1982);

19) C. Boyer, História da Matemática, Editora Edgard Blücher, São Paulo (1981);

20) K. Ribnikov, História de las Matemáticas, Editorial Mir, Moscou (1987),

21) A. Aaboe, Episódios da História Antiga da Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (1984).

C- Métodos Geométricos-Computacionais.

I- A Geometria computacional da Tartaruga e os Conceitos básicos da Geometria Euclidiana. Pontos, retas e planos. Ângulos e Triângulos. Congruências. Como funciona um sistema dedutivo. Retas e planos perpendiculares no espaço. Retas paralelas em um plano. Retas e planos paralelos. Regiões poligonais e suas áreas. Semelhança. Construções geométricas com régua e compasso. A geometria fractal da natureza.

II- Geometria analítica no plano. Utilizando a geometria de coordenadas na demonstração de teoremas da Geometria Euclidiana. Circunferências e superfícies esféricas. Os problemas insolúveis da antiguidade. Áreas de círculos e setores. Os sólidos e seus volumes. Geometria e vetores. Operações com vetores. Os produtos escalar e vetorial. Produto vetorial e determinantes. Matrizes e suas inversas. Dependência e independência lineares. A Geometria Computacional e a dinâmica Newtoniana.

Sugestão Bibliográfica para C.

22) As referências 1), 6), 9), 12) e 13) da parte A.

23) As referências 15), 19), 20) 21) da parte B.

24) S. Papert, LOGO: Computadores e Educação, Editora Brasiliense, São Paulo (1985);

25) E. Moise, F. Downs Jr., Geometria Moderna, Editora da Universidade de Brasília e Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo (1970);

26) A. Pogorelov, Geometria Elemental, Editora Mir, Moscou (1974).

Para encerrar estas nossas considerações apresentamos em seguida duas histórias perturbadoras. A primeira delas trata de um homem que desejava aprender a matar dragões, de autoria do chinês Dschuang Dsi, com acréscimos do matemático francês René Thom; enquanto que a outra, anônima, diz respeito à paranóia que uma centopéia desenvolveu no processo de compreender o seu movimento.

A primeira história:

"Era uma vez um homem
que desejava aprender como matar dragões
e empenhou tudo que possuia
para tornar-se um mestre na arte.
Após três anos
ele estava totalmente preparado,
mas ah! ele não encontrou nenhuma oportunidade
para praticar suas habilidades."

Dschuang Dsi.

"Como consequência ele começou a
ensinar como matar dragões."

René Thom.

A segunda história:

"A centopéia vivia bem contente
até que o sapo, por brincadeira,
perguntou-lhe: "Que perna você move primeiro?"
Isto perturbou-a de tal maneira
que hoje ela passa o dia inteiro
pensando como andar novamente."

(Anônimo)

Agradecimentos:

O autor agradece ao Prof. Carlos Klein pela sugestão de publicar este artigo nesta revista, à sra. Odete Radigonda pela datilografia dos originais deste trabalho e à Sra. Nilza pela paciência demonstrada durante o processo de revisão do material para publicação.